DS 2 : Suites et étude de fonction (convexité).

Exercice 1. **(6 points)** On considère la suite (a_n) définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{-19}{5} \\ a_{n+1} = \dfrac{-3a_n - 16}{a_n + 5} \end{cases}$$

Nous allons chercher à déterminer l'expression de a_n en fonction de deux façons différentes :

1. Par une suite intermédiaire. On définie la suite (b_n) par l'expression $b_n = \dfrac{1}{a_n + 4}$

a. Déterminer b_0 ?

b. Montrer que (b_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

c. En déduire l'expression de b_n puis de a_n en fonction de n pour n entier naturel.

2. Maintenant retrouvons le résultat obtenu à la question précédente par récurrence. C'est à dire, montrer par récurrence que pour n entier naturel l'on a :

$$a_n = \frac{1}{5+n} - 4$$

3. La suite (a_n) est-elle bornée et si c'est le cas, en proposer un encadrement.

4. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Exercice 2. **(8 points)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$$

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 & \in & \mathbb{R} \\ v_{n+1} & = & g(v_n) \end{cases}$$

1. Étude de la fonction g.

a. Étudier les variations de la fonction g ainsi que sa convexité.

b. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{1}{3}(x-1)^2(x+2)$ puis résoudre l'équation :

$$g(\ell) = \ell$$

Pour $\ell \in \mathbb{R}$

2. Dans cette question $v_0 = -1$.

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.

3. Dans cette question $v_0 = 2$.

a. A l'aide de la calculatrice déterminer les valeurs approchées de v_1, v_2 et v_3 et faire une conjecture sur les variations de la suite et sur sa limite.

b. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $1 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

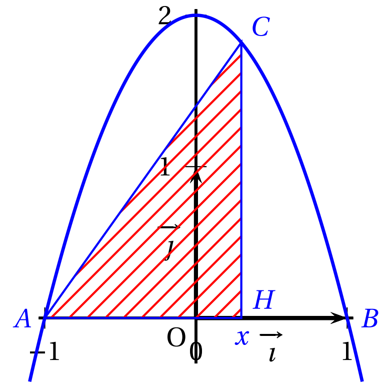
c. Démontrer la conjecture faite relativement à la limite de la suite (v_n).

Exercice 3. **(8 points)**

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} p & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -2x^2+2 \end{array}$$

On note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = -x^1 + 1$.
Elle coupe l'axe des abscisses en $A(-1,0)$ et $B(1,0)$.
Soit $C(x, p(x))$ un point de $\mathscr{P}$ et $H(x,0)$ où $x \in [-1,1]$.
L'objectif de l'exercice est d'étudier la surface du triangle rectangle AHC.



1. Dans cette question, on considère la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} h & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -x^3-x^2+x+1 \end{array}$$

a. Tableau de variation de h sur $[-1,1]$.

b. Déterminer le maximum de la fonction h sur $[-1,1]$.

c. Déterminer le nombre de solution de l'équation $h(x) = 1$ sur $[-1,1]$

d. Résoudre cette équation $h(x) = 1$ sur $[-1,1]$.

2. Montrer que la surface du triangle AHC est donnée en fonction de x par $h(x)$.

3. En déduire, la surface maximale du triangle rectangle AHC ainsi que la valeur de x pour laquelle cette surface est maximale.

4. Déterminer la ou les positions du point C pour que la surface du triangle rectangle AHC soit égale à 1. (ce qui revient à résoudre $h(x) = 1$) On notera φ la solution non entière de équation $h(x) = 1$.

5. (Bonus) Vérifier que $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Pour l'anectode $\dfrac{1}{\varphi}$ est appelé nombre d'or.

Nom : **Prénom :**

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer la dérivée de la fonction f est étudier de la variation de cette fonction.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$. Existe-t-il des points d'inflexion ?

c. Résoudre $f(x) = x$ sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$.

2. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

a. Sur le graphique ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 2. b.

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.