DS 8 de 1S1 du 30 avril 2019.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$. 4 points

1. L'inégalité : $\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+6x+9} \geqslant 0$.

   Pour $-x^2+7x+10$, on a $\Delta = 7^2 - 4 \times 10 = 9 = 3^2$. Donc $x_1 = \dfrac{-7-3}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-7+3}{2\times(-1)} = 2$

   Pour x^2+6x+9, on a $\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 0$. Donc $x_0 = \dfrac{-6}{2\times 1} = -3$.

   Un polynôme est du signe de "a" (coefficient de x^2) à "l'extérieur" des racines. Donc :

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$-x^2+7x-10$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+6x+9		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+7x-10}{x^2+6x+9}$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\frac{-x^2+7x-10}{x^2+6x+9} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [2;5]$$

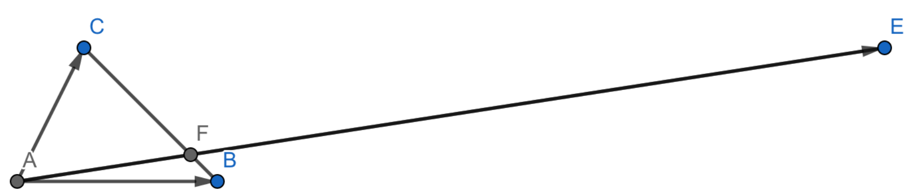
2. L'équation :

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \quad (2\pi) \\ \quad ou \\ 3x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{9} \quad \left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \quad ou \\ x = \dfrac{\pi}{9} \quad \left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Exercice 2. 4 points

On considère un triangle ABC et les points E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure avec le triangle ABC et les point E, F.



2. Montrer que $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AF}$. Que peut-on en déduire ?

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$$

   Donc $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AF}$

3. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

   (a) Déterminer les coordonnées du points F.

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

   Donc $F\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$

   (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}$: $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que les points A, E et F sont alignés. On a $4 \times \dfrac{1}{5} - 1 \times \dfrac{4}{5} = 0$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, donc les points A, E et F sont alignés.

Exercice 3. 4 points

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $G(2-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$ et $H(2, 1)$.

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG}$. En déduire la nature du triangle OGH.

$$\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux. Le triangle OGH est donc rectangle en H.

2. (a) Déterminer les longueurs :
$GO = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1 + 4\sqrt{3} + 12} = \sqrt{20}$
et $HG = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$.

(b) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH}$.
Puisque le triangle OGH est rectangle en H, on a :

$$\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GH^2 = 15$$

(c) En déduire que $\cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis déterminer la valeur de l'angle $\widehat{OGH}$.
$\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GO \times GO \times \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{15}{\sqrt{20} \times \sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{15}{20}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$.
Donc : $\widehat{OGH} = \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 4. 4 points

On considère la fonction f définie sur $[0, 4]$ par :

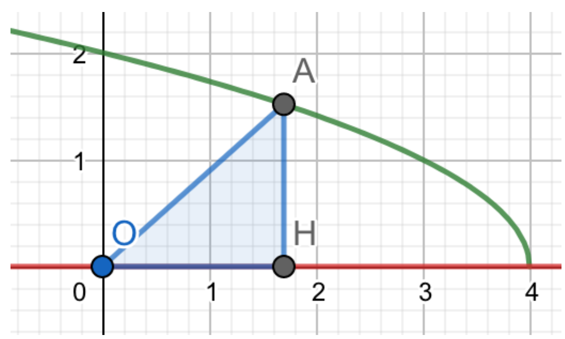
$$f(x) = \sqrt{4-x}$$

Dans le repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f graphique ci-contre où :

- Le point $A\,(a, f(a))$ est un point de $\mathscr{C}_f$ (où $a \in [0, 4]$)
- Le point $H(a, 0)$
- On admet que le triangle OAH est rectangle en H.

On considère la fonction g définie sur $[0, 4]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$$



1. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants ci-dessous. Justifier la quatrième ligne du tableau en admettant le résultat de la troisième ligne du tableau :
(c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$) .

1	$f(x) := $ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
2	$g(x) := \frac{1}{2}x *$ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
3	dériver$(f(x))$ $\rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$
4	dériver$(g(x))$ $\rightarrow \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 \times \sqrt{4-x} - x \times \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right) = \frac{2(4-x)-x}{4\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0, 4]$, en recopiant et complétant le tableau suivant. Sur la dernière ligne vous indiquerez les variation de g :

$$8 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \geqslant x \qquad et \qquad 4\sqrt{4-x} \geqslant 0$$

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$8 - 3x$		$+$	0	$-$	
$2\sqrt{4-x}$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

On a : $g\left(\dfrac{8}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3. Montrer que $g(a)$ représente la surface du triangle OHA.

$$\text{surface du triangle OHA} = \frac{1}{2}OH \times AH = \frac{1}{2}a \times f(a) = g(a)$$

4. En déduire la valeur de a pour que la surface du triangle OHA soit maximale.
D'après la question 2. La valeur maximale de $g(a)$ est $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ et est atteinte en $a = \dfrac{8}{3}$.

Exercice 5. 3 points

On possède un dé à 4 faces avec

- deux faces avec "1" ;
- une faces avec "2".
- une faces avec "6".

On lance le dé et à noter le résultat obtenu. On note X la variable donnant le résultat.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

x_i	1	2	6	Total
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable X.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \qquad et \qquad V(X) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

3. Le joueur mise 10 € et gagne 6 fois la valeur obtenue lors du lancé. On note Y le gain algébrique du joueur.
   (a) On a : $Y = 6 \times \underbrace{X}_{\text{valeur obtenue}} - \underbrace{3}_{\text{mise}}$
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de la variable Y. $E(Y) = E(6X - 10) = 6E(X) - 10 = 6 \times \dfrac{5}{2} - 10 = 5$€.
   Et $V(Y) = V(6X - 10) = 6^2V(X) = 153$
   (c) Vous direz si le jeu est favorable ou non favorable au joueur. Comme $E(Y) \geqslant 0$, le jeu est favorable au joueur.

Exercice 6. 5 points

Un propriétaire décide de louer son hangar à l'année. Il propose pour l'année 2020 un loyer annuel de 4500 €. Il propose au locataire une augmentation suivant deux options possibles :

- Il augmente le loyer chaque année de 100 €. Le loyer à l'année $2020 + n$ sera alors modélisé par la suite (u_n).
- Il augmente le loyer chaque année de 2 %. Le loyer à l'année $2020 + n$ sera alors modélisé par la suite (v_n).

1. Étude de le suite (u_n).

(a) Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n).

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{loyer à l'année 2020+n}} + \underbrace{100}_{\text{Augmentation de 100 €}}$$

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4500$ et de raison 100.

(b) Exprimer u_n en fonction de n.

$$u_n = nr + u_0 = 100n + 4500$$

(c) Déterminer le loyer que devrait percevoir le propriétaire à l'année 2034 (vous arrondirez le résultat à l'euro près)

$$u_{14} = 14 \times 100 + 4500 = 5900€$$

(d) Déterminer ce que représentera pour le propriétaire la somme totale des loyers perçus par le propriétaire à la fin de l'année 2034 avec cette option. (vous arrondirez cette somme à l'euro près)

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{14} &= 4500 + (100 + 4500) + (2 \times 100 + 4500) + ... + (14 \times 100 + 4500) \\ &= 4500 \times 15 + 100 \times (1 + 2 + 3 + ... + 14) = 67500 + 100 \times \frac{14 \times (14+1)}{2} \\ &= 78000 \text{ €} \end{aligned}$$

2. Étude de le suite (v_n).

(a) Déterminer l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n).

$$v_{n+1} = \underbrace{v_n}_{\text{loyer à l'année 2020+n}} \times \underbrace{1 + 0,02}_{\text{Augmentation de 100 €}}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4500$ et de raison $1,02$.

(b) Exprimer v_n en fonction de n.

$$v_n = q^n v_0 = 1,02^n \times 4500$$

(c) Déterminer le loyer que devrait percevoir le propriétaire à l'année 2034 (vous arrondirez le résultat à l'euro près)

$$v_{14} = 1,02^{14} \times 4500 \simeq 5938€$$

(d) Déterminer ce que représentera pour le propriétaire la somme totale des loyers perçus par le propriétaire à la fin de l'année 2034 avec cette option. (vous arrondirez cette somme à l'euro près)

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{14} &= 4500 + 1,02 \times 4500 + 1,02^2 \times 4500 + ... + 1,02^{14} \times 4500 \\ &= 4500 \times (1 + 1,02 + 1,02^2 + ... + 1,02^{14} = 4500 \times \frac{1,02^{15} - 1}{1,02 - 1} = 225000\left(1,02^{15} - 1\right) \\ &= 77820 \text{ €} \end{aligned}$$

3. On considère les deux programmes suivants :

```
% programme 1
U=4500
V=4500
N=0
while V<=U:
    U=U+100
    V=V*1.02
    N=N+1
print(N)
```

```
% programme 2
U=4500
V=4500
SU=4500
SV=4500
N=0
while SV<=SU:
    U=U+100
    V=V*1.02
    SU=SU+U
    SV=SV+V
    N=N+1
print(N)
```

Pour le programme 1, la valeur affichée dans le Shell est 12 et pour le programme 2, elle de 17.
Le premier programme permet de déterminer quand le loyer annuel devient plus élevé pour l'option 2 (progression géométrique) que pour l'option 1 (progression arithmétique). Cela arrivera donc à l'année 2032.
Le deuxième programme permet de déterminer quand la somme des loyers annuels devient plus élevé pour l'option 2 (progression géométrique) que pour l'option 1 (progression arithmétique). Cela arrivera donc à l'année 2037.

Exercice 7. 6 points

On considère la série statistique X suivante :

x_i : valeurs	a	b	7
n_i : effectifs	3	2	5

Partie A

Dans cette partie, les valeurs sont $a = -1$ et $b = 4$.

1. Déterminer les valeurs de la moyenne et de l'écart type (à 10^{-2} près).
2. On définie la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{3} n_i(x - x_i)^2 = \frac{3(x - x_1)^2 + 2(x - x_2)^2 + 5(x - x_3)^2}{10}$$

   (a) Montrer que :
   $$f(x) = x^2 - 8x + 28$$
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
   (c) En déduire que f admet un extremum, donner la valeur de cet extrémum et la valeur pour laquelle il est atteint (on notera $f(x_0)$ et x_0 ces deux valeurs)
   (d) Que représente ces deux valeurs pour la série X

Partie B

Objectif : Déterminer les valeurs de a et b pour que

$$\overline{X} = 5 \qquad et \qquad V(X) = 7$$

1. Montrer que l'on obtient le système :
$$\begin{cases} 3a + 2b = 15 \\ 3a^2 + 2b^2 = 75 \end{cases}$$
2. En déduire que a vérifie l'équation :
$$a^2 - 6a + 5 = 0$$
3. En déduire les valeurs possibles pour a et b.