Correction du DS 8 de TES1 du 29 mars 2019.

EXERCICE 1 **7 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.

Partie A

On prélève au hasard 100 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.

On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,015.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

   - On a la répétition 100 fois d'une expérience de Bernoulli : Pour chacune des 100 clefs soit elle est défectueuse (succès avec une probabilité de 0,015) soit elle ne l'ai pas (échec)
   - De façon indépendante (La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 clés.)

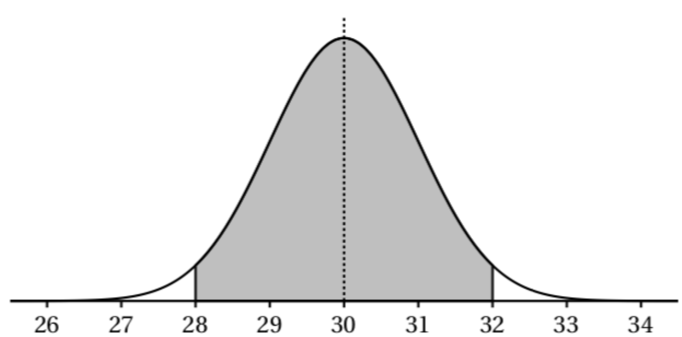
   Donc X le nombre de clés défectueuses sur les 100 clés prélevés suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,015.
2. Calculer les probabilités $p(X=0)=(1-0{,}015)^{100}=0{,}985^{100}\simeq 0{,}221$ à 10^{-3} *près* et :
   $p(X=1)=\binom{100}{1}\times 0{,}015^1\times(1-0{,}015)^{99}\simeq 0{,}336$ à 10^{-3} *près*
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins une clé soit défectueuse.
   $P(X\leqslant 100)=1-P(X=0)=1-0{,}985^{100}\simeq 0{,}779$ à 10^{-3} *près*
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux clés soient défectueuses.
   $P(X\leqslant 2)\simeq 0{,}810$ à 10^{-3} *près* (à la calculatrice)

Partie B

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle [98 ; 103]. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle [28 ; 33].

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu=100$ et d'écart-type $\sigma=1$.
   Calcule la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.
   $$P(R\in[98;103])\simeq 0{,}976 \text{ à } 10^{-3}\ près$$
   Donc la probabilité que la clef soit conforme à la lecture de 97,6 %.

2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture. On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale. Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.
   L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x=30$ est un axe de symétrie de la courbe.



(a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.
Comme la droite d'équation x=30 est un axe de symétrie, l'espérance de W est 30. D'autre part, On sait que $P(30-2\sigma \leqslant X \leqslant 30+2\sigma) \simeq 0{,}95$, donc par lecture graphique $2\sigma \simeq 2$ donc l'écart type de X est environ 1.

(b) En justifiant graphiquement, ou en utilisant la question précédente déterminez les valeurs de :

i. $P(X \leqslant 28) \simeq 0{,}025$ la partie hachurée étant de surface 0,95, on en déduite que les surfaces sous la courbe au dessous de 28 et au dessus de 32 se partage équitablement 0,05 de surface.

ii. $P(X \geqslant 32) \simeq 0{,}025$

iii. $P(X \geqslant 28) = 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$

Exercice 2 — 5 points

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 200 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Une tablette est mise sur le marché si sa masse est supérieur à 200 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 202$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier les valeurs de μ et de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M : " la tablette est mise sur le marché ".

$$P(M) = P(X \geqslant 200) \simeq 0{,}977 \text{ à } 10^{-3} \textit{ près}$$

2. Déterminez la valeur de h pour que la probabilité d'être dans l'intervalle $[202-h; 202+h]$ soit de 0,95.
On utilise la formule $P(\mu - 1{,}96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1{,}96\sigma)$, donc $h = 1{,}96$.

3. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,99.

(a) Dans un premier temps, on ne modifie pas le réglage de $\mu = 202$ mais celui de σ. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement " la tablette est mise sur le marché " soit égale à 0,99.
Puisque $X \sim \mathscr{N}(202{,}\sigma)$, on a $\dfrac{X-202}{\sigma} \sim \mathscr{N}(0{,}1)$. Or on veut :

$$P(X \leqslant 200) = 1 - P(X \geqslant 200) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-202}{\sigma} \leqslant \frac{200-202}{\sigma}\right) = 0{,}01$$

Donc :

$$\frac{-2}{\sigma} = -2{,}33 \Leftrightarrow \sigma = \frac{-2}{-2{,}33} \simeq 0{,}8597$$

(b) L'entreprise change de type de machines. Ces nouvelles machines permettent d'obtenir un écart type de 0,3 (c'est-à-dire $\sigma = 0{,}3$). Avec ce réglage déterminer la valeur de μ de sorte que la probabilité de l'événement " la tablette est mise sur le marché " soit égale à 0,99.
Puisque $X \sim \mathscr{N}(\mu; 0{,}3)$, on a $\dfrac{X-\mu}{0{,}3} \sim \mathscr{N}(0{,}1)$. Or on veut :

$$P(X \leqslant 200) = 1 - P(X \geqslant 200) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{0{,}3} \leqslant \frac{200-\mu}{0{,}3}\right) = 0{,}01$$

Donc :

$$\frac{200-\mu}{0{,}3} = -2{,}33 \Leftrightarrow \mu \simeq 200 + 2{,}33 \times 0{,}3 \simeq 200{,}7$$

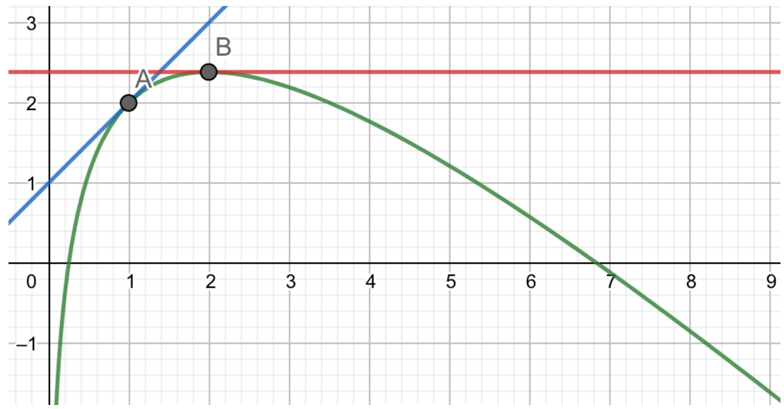
Exercice 3 — 8 points

Commun à tous les candidats

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0{,}5\ ;\ 9]$. Les points A (1 ; 2) et B d'abscisse 2 sont sur la courbe (C).

Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude graphique

1. On a $f'(1) = 1$ (le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est 1) et $f'(2) = 0$ (La tangente en B est horizontale.
2. La tangente à la courbe (C) passant par A passe par le point de coordonnées $(0\,;1)$. Déterminer une équation de cette tangente.
   L'ordonnée à l'origine est donc 1, comme sont coefficient directeur est $f'(1) = 1$, on obtient comme équation : $y = x + 1$.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.. Par lecture graphique :
   $$2 \leqslant \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 3$$
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0{,}5\,;9]$. Argumenter la réponse. Les tangentes à la courbe semblent systématiquement au dessus de la courbe, donc la fonction f semble convexe.

Partie B :Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0{,}5\,;\,9]$ par

$$f(x) = -x + 3 + 2\ln(x).$$

1. Pour tout réel x de $[0{,}5\,;\,9]$, calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $$f'(x) = -1 + 0 + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2-x}{x}$$
2. Étudier le signe de f' sur $[0{,}5\,;\,9]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0{,}5\,;\,9]$.
   Sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,9]$, le dénominateur x est positif donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $x - 2$.
   Or $2 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x$.
   D'où le tableau de variation :

x	0.5		2		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2.5 - 2\ln 2$	$\nearrow$	$1 + 3\ln 2$	$\searrow$	$4\ln 3 - 6$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0{,}5\,;9]$.
   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   On a $2.5 - 2\ln 2 \simeq 1{,}118 > 0$, $1 + 3\ln 2 \simeq 2{,}386 > 0$ et $4\ln 3 - 6 < 0$, on peut affirmer, d'après le tableau de variation que la fonction f admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5; 9]$ et que cette solution est sur l'intervalle $[2; 9]$.

x	6,84	6,85
f(x)	0,0055	-0,001

Donc $6{,}84 \geqslant \alpha \geqslant 6{,}85$

4. En déduire le tableau de signe de f sur $[0{,}5\,;\,9]$.

x	0.5		α		9
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5. On considère la fonction F définie sur $[0{,}5\,;\,9]$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2x\ln(x)$.

   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0{,}5\,;\,9]$.

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x + 1 + 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = -x + 3 + 2\ln(x) = f(x)$$

   Donc F est une primitive de f.

   (b) En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) &= \left(-\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 + 2 \times 2\ln 2\right) - \left(-\frac{1}{2} \times 1^2 + 1 + 2 \times 1 \times \ln 1\right) \\ &= 4\ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 2{,}3 \text{ à } 10^{-1} \textit{ près}\end{aligned}$$

Partie C : Étude de la convexité de f

1. On a :

$$f'(x) = \frac{2-x}{x}$$

   Donc :

$$f''(x) = \frac{-1 \times x - (2-x) \times 1}{x^2} = \frac{-2}{x^2}$$

2. En déduire la convexité de la fonction f. On a :

$$f'(x) = \frac{2-x}{x} < 0$$

   Donc f est concave.