∽ Baccalauréat DS 3 du 18 novembre 2021 ∾
Durée 2h

Exercice 1 **9 points**

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question, la réponse correspondante, ainsi qu'une ***justification.***
Une réponse exacte avec sa justification rapporte 1,5 point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

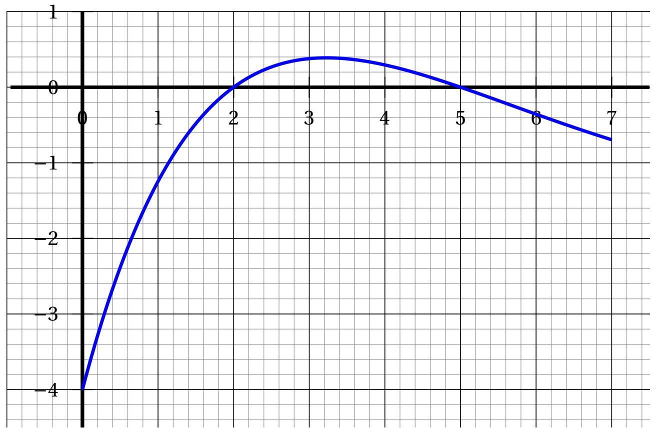
$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.

Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $4\mathrm{e}^{-2x}$ **d.** $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

2. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;\,7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ est :

a.

x	0	3,25	7
$f(x)$	↗		↘

b.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↘	↗	↘	

c.

x	0	2	5	7
$f(x)$	↗	↘	↗	

d.

x	0	2	7
$f(x)$	↗		↘

3. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$.

b. f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$

c. f' est négative sur $\mathbb{R}$

d. f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

c. la suite (U_n) diverge

d. la suite (U_n) est majorée

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

a. La suite (u_n) est minorée.

b. La suite (u_n) est décroissante.

c. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021.

d. La suite (u_n) est majorée.

6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.

On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
  u = 2
  n = 0
  while u < 45 :
    u = 0,75*u + 5
    n = n+1
  return n
```

Cette fonction renvoie :

a. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;

b. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

c. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

d. la plus grande valeur de n telle que $u_n \leqslant 45$.

EXERCICE 2 **11 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer à la calculatrice le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$
   a. Étudier les variations de la fonction f.
   b. Étudier la convexité de la fonction f.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Étude de la suite (u_n).
   a. Construire sur le graphique en annexe, les 3 premiers termes de la suite récurrente (u_n). Quelle conjecture peut-on faire ?
   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

d. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déduire des questions précédentes, un encadrement de ℓ.

e. On admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer la valeur de ℓ.

f. Interpréter cette limite dans le contexte de la modélisation.

3. Étude de la vitesse de convergence.

a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur n tel que : $4 - u_n < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 1
    n = 0
    while ..............................
        u = ............................
        n = n + 1
    return n
```

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (Vous donnerez les résultats à 10^{-5} prés.)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1								

c. En déduire la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-3}$.

4. **(Bonus)** On veut démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1}.$$

On note $A(4,4)$ et $B\left(3, \frac{19}{5}\right)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$ courbe représentative de f (en effet $f(3) = \frac{19}{5}$)

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ avec $x \in [3,4]$. Du fait de la convexité de f sur $]-2,+\infty[$, on admettra que le coefficient directeur de la corde (AM) à $\mathscr{C}$ est inférieur au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente en B.

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3 \leqslant u_n \leqslant 4$$

c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{6}{25}(4 - u_n)$$

d. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1}$$

e. Comment interprétez vous cette inégalité ?

Nom : **Prénom :**

Annexe

Représentation de la fonction f