∽ Baccalauréat DS 3 du 18 novembre 2021 ∾
Durée 2h

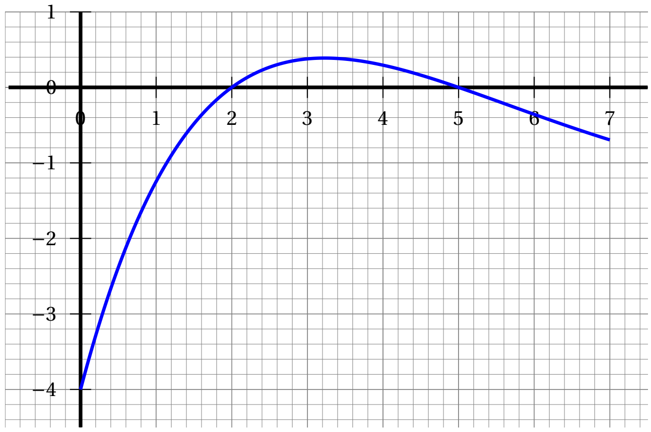
EXERCICE 1 **8 points**

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.
On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$ **b.** $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ **c.** $4\mathrm{e}^{-2x}$ **d.** $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

> $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ et donc
> $f''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + (1-2x) \times (-2)\mathrm{e}^{-2x} = (-2-2+4x)\,\mathrm{e}^{-2x} = 4\,(x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}$
> **Réponse b.**

2. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

> f' est négative ou nulle sur $[0\,,\,2]$ donc la fonction f est décroissante sur $[0\,,\,2]$.
> f' est positive ou nulle sur $[2\,,\,5]$ donc la fonction f est croissante sur $[2\,,\,5]$.
> f' est négative ou nulle sur $[5\,,\,7]$ donc la fonction f est décroissante sur $[5\,,\,7]$.
> **Réponse b.**

3. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

D'après ce tableau de variation :

a. f' est positive sur $\mathbb{R}$.

b. f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$.

c. f' est négative sur $\mathbb{R}$.

d. f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$.

> La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ donc f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$.
> **Réponse b.**

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

Non car par exemple si $U_n = -n$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ ces deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) diverge;

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

Non avec $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ on a $V_n \geqslant 2$;

c. la suite (U_n) diverge

Non avec par exemple $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, les deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) converge;

d. la suite (U_n) est majorée

On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée. **Réponse d.**

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

$n^2 - 17n + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{80}{4} = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4} = \left(n - \frac{17-\sqrt{209}}{2}\right)\left(n - \frac{17+\sqrt{209}}{2}\right)$.

On a donc quel que soit n, $u_n \geqslant -\frac{209}{4}$: la suite est donc minorée. Réponse a.

6. On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil :
   u = 2
   n = 0
   while u < 45 :
      u = 0,75*u + 5
      n = n+1
   return n
```

Cette fonction renvoie :

a. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;

b. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

c. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

d. la plus grande valeur de n telle que $u_n \leqslant 45$.

Réponse a.

EXERCICE 2 **12 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$ 0,5
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85 ; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$. 0,5
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
     $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
   - $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$. 1,5

   b. On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$. 0,25

   c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$. 0,25

4.

$$u_{10} \simeq 2449 \qquad \text{et} \qquad u_{11} \simeq 2531$$ 0,25

   Donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11. 0,25

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

   a. Étudier les variations de la fonction f.

   Soit f est une fonction rationnelle définie sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc elle est dérivable sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

   $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$ 0,5

   $f'(x) > 0$ sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ puis sur $]-2, +\infty[$. 0,5

   b. Étudier la convexité de la fonction f. 0,5

   $f''(x) = \dfrac{-12}{(x+2)^3}$

   Donc $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[$ et donc f est convexe sur $]-\infty, -2[$.

   Donc $f''(x) < 0$ sur $]-2, +\infty[$ et donc f est concave sur $]-2, +\infty[$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. 1

$$f(x) = x \Leftrightarrow 5x + 4 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 = (x+1)(x-4) \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

2. **a.** 0,5

b. Soit P_n la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. 0,25 si rédaction correcte

- **Initialisation** 0,25

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

  La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ 0,25

  donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$. 0,25

  $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

  On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. 0,5

- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

d. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer un encadrement de ℓ. 0,5

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, on a $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

e. On admet que $f(\ell) = \ell$. Déterminer la valeur de ℓ. 0,5

D'après la question 1. c. $\ell = -1$ ou $\ell = 4$. Or $0 \leqslant \ell \leqslant 4$ donc $\ell = 4$.

f. Interpréter cette limite dans le contexte de la modélisation. 0,5

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $4 - u_P < E$. 0,5

```
def seuil(E) :
    u = 1
    n = 0
    while 4 − u ⩾ E
        u =(5*u+4)/(u+2)
        n = n + 1
    return n
```

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. 0,5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	3	3,8	3,9655	3,9942	3,99903	3,9999	4	4

c. En déduire la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-3}$. 0,5

D'après le tableau précédent le programme retourne la valeur 5.

4. **(Bonus)** On veut démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1}.$$

On note $A(4,4)$ et $B\left(3, \frac{19}{5}\right)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$ courbe représentative de f (en effet $f(3) = \frac{19}{5}$)
Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ avec $x \in [3;4]$. Du fait de la convexité de f sur $]-2,+\infty[$, on admettra que le coefficient directeur de la corde (AM) à $\mathscr{C}$ est inférieur au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B.

a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente en B. 0,25

$$f'(3) = \frac{6}{(3+2)^2} = \frac{6}{25}$$

b. Montrer que : 0,25

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3 \leqslant u_n \leqslant 4$$

Nous avons montré que (u_n) était une suite croissante. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 = 3 \leqslant u_n \underbrace{\leqslant 4}_{\text{montrer en 2. a.}}$$

c. En déduire que : 0,5

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{6}{25}(4 - u_n)$$

En utilisant l'indication ci-dessus : "on admettra que le coefficient directeur de la corde (AM) à $\mathscr{C}$ est inférieur au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B. ", puisque $u_n \in [3,4]$, on a :

$$\frac{f(4) - f(u_n)}{4 - u_n} \leqslant f'(3) \Leftrightarrow \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \leqslant \frac{6}{25} \Leftrightarrow 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{6}{25}(4 - u_n)$$

De plus $0 \leqslant 4 - u_{n+1}$ ce déduit du 2. a.

d. Démontrer par récurrence que : 0,75

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1}$$

- **Initialisation**
  $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$
  $0 \leqslant 1 = 4 - u_1 \leqslant \left(\dfrac{6}{25}\right)^{1-1} = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire
  $$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1}$$
  Comme :
  $$0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{6}{25}(4 - u_n)$$
  On a :
  $$0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{6}{25}\right)^{n-1} \times \frac{6}{25} = \left(\frac{6}{25}\right)^{(n+1)-1}$$
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

e. Comment interprétez vous cette inégalité? 0,25

Cette inégalité permet d'avoir une idée de la vitesse de convergence de la suite (u_n) : elle tend "plus vite" vers 4 que $\left(\dfrac{6}{25}\right)^{n-1}$ ne tend vers 0.