DS 3 : Probabilité et suites.

Exercice 1. 1. **Correction :**

$$\tau_5(h)=\frac{g(5+h)-g(5)}{h}=\frac{1+\dfrac{3}{5+h}-\left(1+\dfrac{3}{5}\right)}{h}=\frac{\dfrac{3}{5+h}-\dfrac{3}{5}}{h}=\frac{15-3(5+h)}{5(5+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-3}{5(h+5)}\underbrace{\rightarrow}_{h\to 0}\frac{-3}{25}$$

Donc g est dérivable en 5 est son nombre dérivée est $g'(5)=\dfrac{-3}{5}$. (Par ailleurs $g(5)=1+\dfrac{3}{5}=\dfrac{8}{25}$)

2. L'équation de la tangente en 5 à la courbe représentative de g est :

$$y=g'(5)(x-5)+g(5)=\frac{-3}{25}(x-5)+\frac{8}{5}=\frac{-3}{5}x+\frac{11}{5}$$

3.

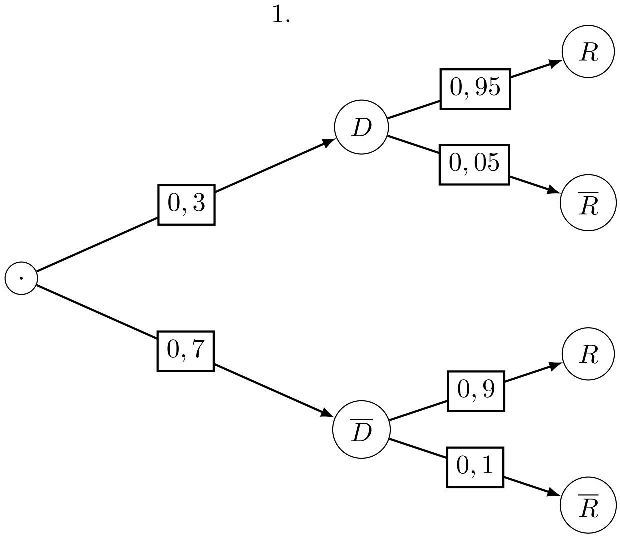
$$\tau_a(h)=\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{1+\dfrac{3}{a+h}-\left(1+\dfrac{3}{a}\right)}{h}=\frac{\dfrac{3}{a+h}-\dfrac{3}{a}}{h}=\frac{3a-3(a+h)}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-3}{a(h+a)}\underbrace{\rightarrow}_{h\to 0}\frac{-3}{a^2}$$

4. la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{3}{x}$$

Exercice 2. Correction :

1.



2. On choisit une valise à quatre roues, déterminer la probabilité qu'elle réussisse les tests.

$$P_{\overline{D}}(R)=\frac{P(R\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{0,63}{0,7}=0,9$$

3. Démontrer que la probabilité que la valise choisie réussisse les tests est de $0,915$.

$$P(R)=P(D\cap R)+P(\overline{D}\cap R=P(D)\times P_D(R)+P(D\cap R)=0,3$$

$$P(R)=0,3\times 0,95+0,63=0,915$$

4. Sachant que la valise réussit les tests, quelle est la probabilité que ce soit une valise à quatre roues ?

$$P_R(\overline{D})=\frac{P(R\cap\overline{D})}{P(R)}=\frac{0,63}{0,915}=\frac{42}{61}\simeq 0,689$$

$$P_{\overline{R}}(\overline{D})=\frac{P(\overline{R}\cap\overline{D})}{P(\overline{R})}=\frac{0,7\times 0,1}{1-0,915}=\frac{14}{17}\simeq 0,824$$

Exercice 3.

Correction : Partie A

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

Une étude statistique a permis d'établir que :

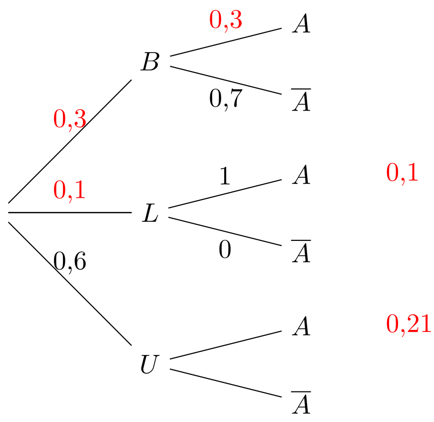
- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 30 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance.
- 10 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance.

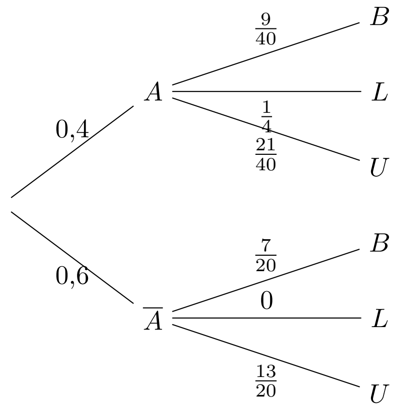
1. Avec les données de l'énoncé, on peut dire que :

$$P(B)=0,3,\ P_B(A)=0,3,\ P(L)=0,1,\ P(L\cap A)=0,1 \text{ et } P(U\cap A)=0,21.$$

On place ces résultats dans l'arbre :

2. L'évènement « le client a loué une berline et a choisi l'option d'assurance sans franchise » est l'évènement $B \cap A$. D'après l'arbre : $P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$.
3. On cherche $P(A)$; d'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(B \cap A) + P(L \cap A) + P(U \cap A) = 0,09 + 0,1 + 0,21 = 0,4$.
4. $P_L(A) = \dfrac{P(L \cap A)}{P(L)} = \dfrac{0,1}{0,1} = 1$.
5. .





$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{9}{40} \quad ; \quad P_A(L) = \frac{P(A \cap L)}{P(A)} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P_A(U) = \frac{21}{40}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,21}{0,6} = \frac{7}{20} \quad ; \quad P_{\overline{A}}(L) = \frac{P(\overline{A} \cap L)}{P(\overline{A})} = \frac{0}{0,6} = 0 \quad ; \quad P_{\overline{A}}(U) = \frac{13}{20}$$

Exercice 4. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 telle que : $u_4 = 62$ et $u_{14} = 172$. Déterminer la raison et u_0. Déterminer la somme : $u_4 + u_5 + ... + u_{14}$.

On a $r = \dfrac{u_{14} - u_4}{14 - 4} = \dfrac{110}{10} = 11$. ET $\underbrace{u_4 + u_5 + ... + u_{14}}_{11 \text{ termes}} = \dfrac{u_4 + u_{14}}{2} \times 11 = \dfrac{62 + 172}{2} \times 11 = 1887$

Exercice 5. En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait 1000 milliers de clients, . Depuis, chaque année, l'opérateur perd 5 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 9 milliers de nouveaux clients.

1. On donne l'algorithme suivant :
. Variables : k, NbClients
. Traitement : Affecter à k la valeur 0
.   Affecter à NbClients la valeur 1000
.   Tant que k<9
.   affecter à k la valeur k+1
.   affecter à NbClients la valeur 0.95 $\times$ NbClients + 9
.   afficher à NbClients
.   Fin tant que

Compléter la phrase : Cet algorithme calcule et affiche le nombre de clients en milliers pour k variant de 1 à 9 c'est-à-dire pour les années 2011 à 2019 .
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants :

k	1	2	3	4	5
u_k	959	920	883	848	815

3. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 9$
Le terme u_n donne une estimation du nombre de clients pour l'année $2010 + n$.
Pour étudier la suite (u_n), on considère la suite(v_n) par définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 180$.
4. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez la raison et le première terme.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 180 = 0,95u_n + 9 - 180 = 0,95u_n - 171 = 0,95(v_n + 180) - 171 = 0,95v_n + 171 - 171 = 0,95v_n$$

Donc la suite (v_n) est une suite arithmétiques de premier terme $v_0 = u_0 - 180 = 820$ et de raison $0,95$.
5. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n entier naturel.
Donc $v_n = 0,95^n \times v_0 = 820 \times 0,95^n$ et $u_n = v_n + 180 = 820 \times 0,95^n + 180$