Nom Prénom :

DS 3 : limites de suites et géométrie vectorielle.

Question de cours : (2 points)

a) Soit $x \in [-1, +\infty[$. Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n$ lorsque $q > 1$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n$ lorsque $0 < q < 1$

Exercice 1. (4 points) on considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$$

1. Déterminer le domaine de dérivation de la fonction f et sa fonction dérivée.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f après avoir déterminer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. A partir du tableau de variation de f, déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 14$. Puis résoudre cette équation.
4. Soit $k \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 2. (2,5 points) On considère l'ensemble $E = [\![1, 8]\!]$. Donner :

a) Le nombre de 3-listes de E.

b) Le nombre de 3-listes sans répétition de E

c) Le nombre de parties de E à 3 éléments

d) Le nombre de permutations de E.

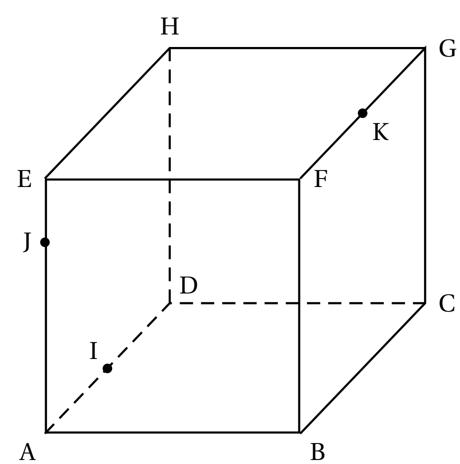
e) Le nombre de sous-ensembles de E.

Exercice 3. **Partie A**

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG). Vous compléterez la figure en annexe.



Partie B

ABCD est un tétraèdre. M, N, P et Q sont les points définis pas :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.
2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$
3. Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.

Exercice 4. Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie.

À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, 80 % des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

On a donc : $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$ et $u_0 = 160$.

1. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160					

a. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule `C2` pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017+n$?

b. Recopier et compléter ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier.

c. Donner une estimation du nombre d'inscrits en 2021.

2. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 250$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et préciser son terme initial.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 250 - 90 \times 0,8^n$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. En 2017, la colonie comptait 22 tentes.

Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose l'algorithme ci-dessous :

```
U ← 160
N ← 0
Tant que ................. faire
        U ← 0,8U + 50
        N ← ........
Fin tant que
```

a. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre au problème.

b. Déterminer par le calcul la valeur de N obtenue après exécution de cet algorithme ?

Exercice 5. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\left(1-u_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0<u_{n+1}<0,9u_n<1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0<u_n\leqslant 0,3\times 0,9^n$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que … faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n\left(1-v_n\right) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n\geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1,06x(1-x)$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0<v_{n+1}<v_n<0,5$.
4. Justifier que (v_n) converge. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell=1,06\ell(1-\ell).$$

5. Déterminer ℓ
6. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Annexe de l'exercice (à rendre avec la copie)