DS 3 Cor : limites de suites et géométrie vectorielle.

Exercice 1. Correction :

1. Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition :

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x+6)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2-x^2-2x-6}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

2. On a $(x-1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ (signe de a à l'extérieur des racines). Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$

3. D'après le tableau de variation, l'équation $f(x)=14$ a deux solutions, une solution sur l'intervalle $]1,4[$ est une solution sur $]4,+\infty[$.

$$f(x)=\frac{x^2+2x+6}{x-1}=14 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+6-14(x-1)}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-12x+20=(x-6)^2-36+20=(x-6-4)(x-6+4)=(x-10)(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ \text{ou} \\ x=2 \end{cases}$$

4. On a :

k	$-\infty$		-2		10		$+\infty$
$f(x)=k$		2 *solutions*	1	0 *solution*	1	2 *solutions*	

Exercice 2. Correction.

a) Le nombre de 3-listes de E.
Le nombre de 3-listes d'un ensemble à 8 éléments est 8^3.

b) Le nombre de 3-listes sans répétition de E
Le nombre de 3-listes sans répétition d'un ensemble à 8 éléments est $8\times7\times6$.

c) Le nombre de parties de E à 3 éléments
Le nombres de 3-combinaisons d'un ensemble à 8 éléments est : $\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

d) Le nombre de permutations de E.
Nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments : 8!.

e) Le nombre de sous-ensembles de E.
Nombre de sous-ensembles d'un ensemble à 8 éléments : 2^8.

Exercice 3. Correction.

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
Construction du point P, intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) : voir figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).
   - Le point P est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) ; le point H appartient au plan (EFG) donc la droite (EH) est contenue dans le plan (EFG).
   On en déduit que P $\in$ (IJK) $\cap$ (EFG).
   - Le point K appartient au plan (IJK) et à la droite (FG) qui est contenue dans le plan (EFG).
   On en déduit que K $\in$ (IJK) $\cap$ (EFG).
   - Les plans (IJK) et (EFG) ne sont pas parallèles donc leur intersection est une droite. Les deux points P et K appartiennent à l'intersection des deux plans donc l'intersection des deux plans (IJK) et (EFG) est la droite (PK).

Partie B

1.

2.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

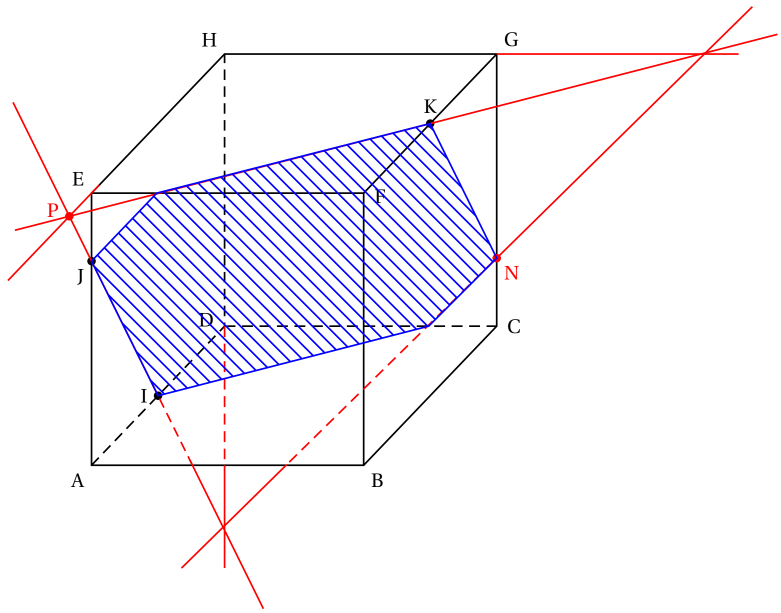
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

3. Donc :

$$2\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MQ}=2\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MP}$$

Donc les trois vecteurs sont coplanaires et les 4 points, M, N, P et Q sont coplanaires.



Exercice 4. Correction.

Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie. À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, 80 % des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

1. Soit (u_n) la suite numérique qui modélise le nombre d'inscrits lors de l'année $2017+n$. Ainsi $u_0=160$.
Prendre 80 %, c'est multiplier par 0,8.
Comme il y a 50 nouveaux chaque année, on passe du nombre d'inscrits l'année n à l'année $n+1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 50 ; donc, pour tout n, $u_{n+1}=0,8u_n+50$.

2. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

a. La formule que l'on peut saisir dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017+n$ est `= 0.8*B2 + 50`.

b. On complète ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier :

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160	178	192	204	213	221

c. $2021=2017+4$ donc une estimation du nombre d'inscrits en 2021 est $u_4=213$.

3. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n=u_n-250$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc on a : $u_n=v_n+250$.

a.
- $v_{n+1}=u_{n+1}-250=0,8u_n+50-250=0,8\,(v_n+250)-200=0,8v_n+200-200=0,8v_n$
- $v_0=u_0-250=160-250=-90$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0,8$ et de terme initial $v_0=-90$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n=v_0\times q^n=-90\times 0,8^n$.

c. $v_n=-90\times 0,8^n$ et $u_n=v_n+250$ donc, pour tout n, $u_n=250-90\times 0,8^n$.

d. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et $0<0,8<1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0. Comme $u_n=v_n+250$, on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 250.
Cela veut dire que si le modèle est correct, le nombre d'inscrits va tendre vers 250.

4. En 2017, la colonie comptait 22 tentes donc pouvait loger 220 enfants.
Il faudra construire une nouvelle tente quand le nombre d'enfants dépassera 220.
Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose un algorithme.

a. On complète l'algorithme proposé :

$U \leftarrow 160$

$N \leftarrow 0$

Tant que $U \leqslant 220$ faire

$U \leftarrow 0,8U + 50$

$N \leftarrow N + 1$

Fin tant que

b. On a calculé dans le tableau $u_5 = 221 > 220$ donc la valeur de N après exécution de cet algorithme est 5.

Exercice 5. Corrigé

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n)\end{array}\right.$$
où pour tout n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. $u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,189$; le nombre de tortues en 2001 est 189.
$u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1-0,189) \approx 0,138$; le nombre de tortues en 2001 est 138.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < 0,9u_n < 1$.
Montrons d'abord pour tout entier naturel n, u_n appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1[$.
Initialisation : $0 < u_0 = 0,3 < 1$ donc vrai au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 < u_n < 1$. donc $0 < 1-u_n < 1$. Donc $0 < u_n(1-u_n) < 1$ et enfin $0 < 0,9u_n(1-u_n) < 0,9 < 1$.
On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1[$. C'est aussi le cas de $1-u_n$ aussi.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$. Donc $0 < 1-u_n < 1$ et $0 < 0,9u_n < 0,9 < 1$. Donc n $0 < 0,9u_n(1-u_n) < 0,9u_n < 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$. On sait que, pour tout n, $u_n \in [0\,;\,1]$; donc $u_n \geqslant 0$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $u_0 \leqslant 0,3 \times 0,9^0$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose que, pour $n \geqslant 0$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.
  D'après la question précédente : $u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.
  D'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
  On déduit : $u_{n+1} \leqslant 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{n+1}$.
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout n, $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$, et on a donc par conséquence : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ? $-1 < 0,9 < 1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0 ;
on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.
On sait que, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues, c'est-à-dire 0,03 millier de tortues.
On complète l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence :

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \geqslant 0,03$ faire :
	$\quad$ n prend la valeur $n+1$
	$\quad$ u prend la valeur $0,9u(1-u)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2000+(n-1)$

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012. $v_{11} = 1,06v_{10}(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1-0,032) \approx 0,033$; il y aura donc 33 tortues en 2011.
   $v_{12} = 1,06v_{11}(1-v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1-0,033) \approx 0,034$; il y aura donc 34 tortues en 2012.
2. $f'(x) = 1,06(2x-1)$ D'où le tableau de variations :

x	0		1		0
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0.265	$\searrow$	0

3. On pose pour tout entier naturel n, P_n : $0 < v_{n+1} < v_n < 0,5$.
   Initialisation : On a $0 < V_{10} = 0,032 < v_{11} = 0,03283456 < 0,5$ Donc P_{10} vrai.
   Hérédité : Soit $n \geqslant 10$. Supposons P_n vrai, c'est à dire que :
   $0 < v_n < v_{n+1} < 0,5$
   D'après le tableau de variation de la fonction f, la fonction f est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Donc :
   $$f(0) < f(v_n) = v_{n+1} < f(v_{n+1}) = v_{n+2} < f(0,5) = 0,265$$
   Donc P_n.
   On a donc montrer que P_{10} vrai et P_n implique P_{n+1}, donc on a montré que pour tout $n \geqslant 10$, $0 < v_n < v_{n+1} < 0,5$
4. La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente. Notons ℓ sa limite.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-v_n) = 1-\ell$
   on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,06v_n(1-v_n) = 1,06\ell(1-\ell)$.
   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
   Comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$.
5. $$\ell = 1,06\ell(1-\ell) \Leftrightarrow 1,06\ell^2 - 0,06\ell = 0 \Leftrightarrow 1,06\ell\left(\ell - \frac{0,06}{1,06}\right) \Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{3}{53}$$
6. La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a a 32 tortues en 2010.
   Donc, pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_0$ autrement dit $v_n \geqslant 0,032$.
   Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction. (La limite est même de 56 tortues environs)