DS 3 du 20 novembre.

Exercice 1

Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombre complexes suivants ainsi que leur module :

a) $z_1 = (1+i) - (6-3i)$

b) $z_2 = 2(5-i)(3-i) + i(6-i)$

c) $z_3 = \dfrac{3-i}{5-i}$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^2 = 1$

b) $z^2 + 3z - 4 = 0$

c) $z^2 + 2z + 3 = 0$

d) $iz + 1 - 2i = 2$

e) $z^4 + 6z^2 + 25$

(Vérifier que $(1+2i)^2 = -3+4i$)

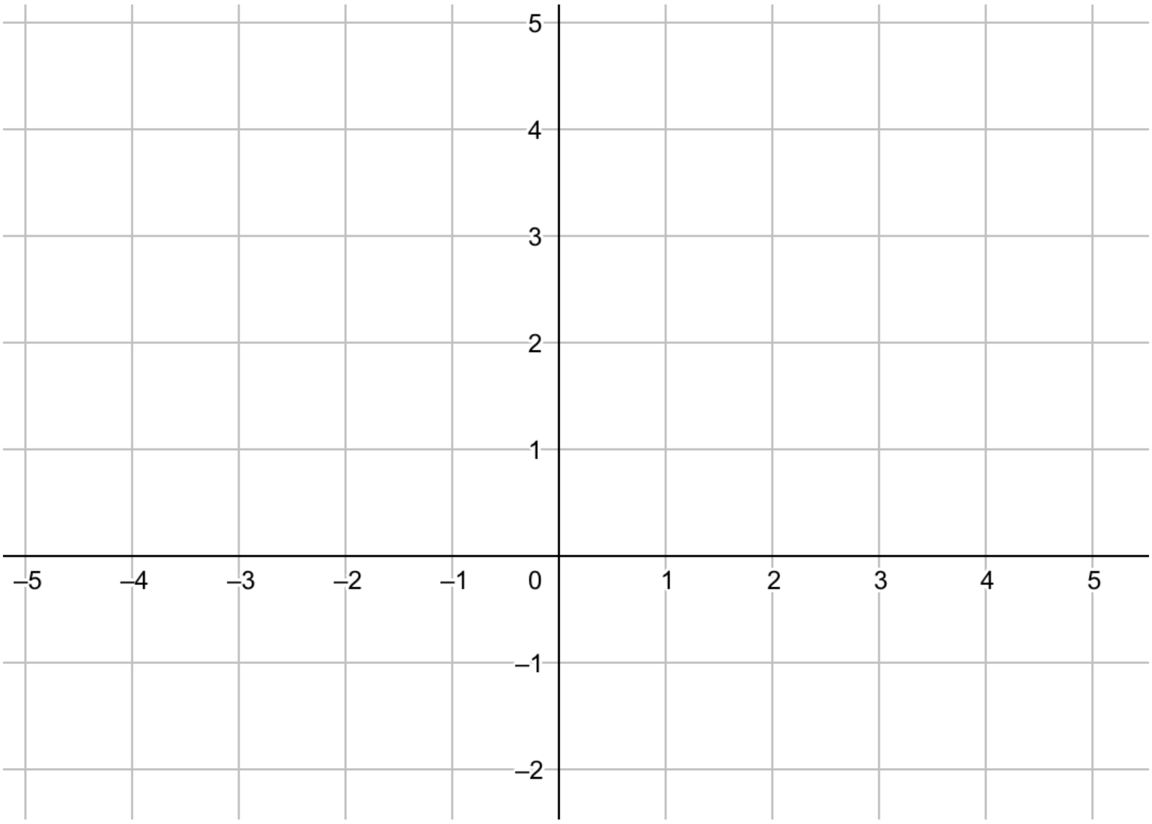
Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'équation (vous représenterez ces trois ensemble de points sur le graphique ci-dessous) :

a) $|z+2-i| = 3$

b) $|z+2-i| = |z+2+i|$

c) $|iz| = |-iz-4i|$



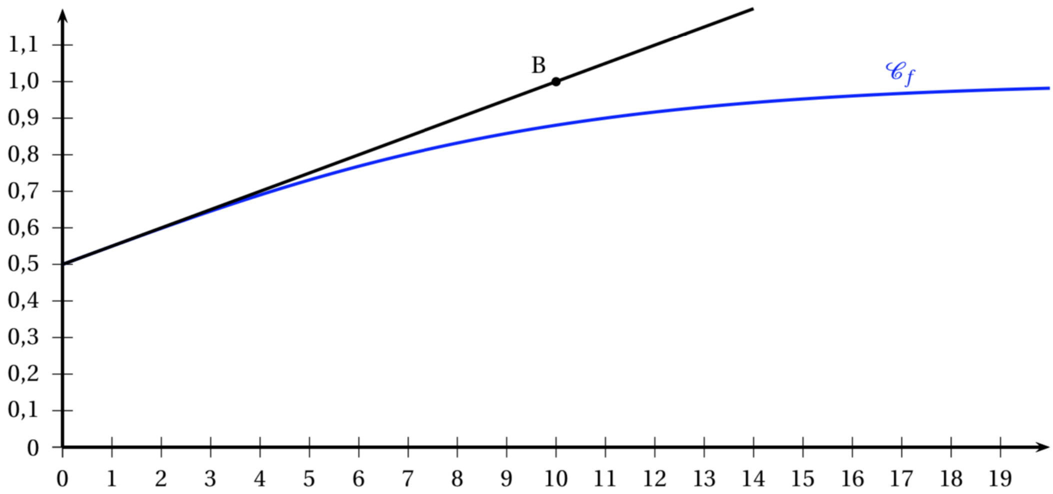
Exercice 4

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Justifier que $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
   $$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$
4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par
$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

1. (a) Déterminer l'expression de $p'(x)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
2. (a) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0,95$.
   (b) Si il existe une solution positive α de cette équation, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
   (c) Donner les solutions de $f(x) > 0,95$ en fonction de la valeur α.
   (d) (bonus) Montrer que l'expression de cette solution est $\alpha = \dfrac{\ln 19}{0,2}$.

Partie C

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$
Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. On a déterminé dans le partie A, la limite de la fonction p en $+\infty$. Interpréter cette limite dans ce contexte.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. Déterminer l'année au cours de laquelle cela se produit.

Réponse de l'exercice 1

a) $z_1 = (1+i) - (6-3i) = -5+4i$ donc $\text{Re}(z_1) = -5$; $\text{Im}(z_1) = 4$ et enfin $|z_1| = \sqrt{41}$.

b) $z_2 = 2(5-i)(3-i) + i(6-i) = 30 - 2 - 16i + 6i + 1 = 29 - 10i$ donc $\text{Re}(z_2) = 29$; $\text{Im}(z_2) = -10$ et enfin $|z_2| = \sqrt{941}$.

c) $z_3 = \dfrac{3-i}{5-i} = \dfrac{(3-i)(5+i)}{26} = \dfrac{16-2i}{26} = \dfrac{8}{13} - \dfrac{1}{13}i$ donc $\text{Re}(z_3) = \dfrac{8}{13}$; $\text{Im}(z_3) = \dfrac{-1}{13}$ et enfin $|z_1| = \dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

Réponse de l'exercice 2

a) $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -1 \quad$ ou $\quad z = 1$

b) $z^2 + 3z - 4 = 0$. On obtient $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ donc $z_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $z_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ sont les deux racines du polynôme et donc les solutions de cette équation.

c) $z^2 + 2z + 3 = 0$. On obtient $\Delta = -8 = (2\sqrt{2}i)^2 < 0$. Donc il y a deux solutions à cette équation :

$$z_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}i}{2} = -1 - \sqrt{2}i \qquad \text{et} \qquad z_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i$$

d) $iz + 1 - 2i = 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{1+2i}{i} = -i + 2$

e) $z^4 + 6z^2 + 25$. On pose $Z = z$. On obtient $Z^2 + 6Z + 25 = 0$. On a $\Delta = 36 - 100 = -64 = (8i)^2$, donc l'équation en Z possède deux solutions :

$$Z_1 = \frac{-6-8i}{2} = -3 - 4i \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-6+8i}{2} = -3 + 4i$$

Comme $(1+2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$. On obtient :

$$z^2 = -3 + 4i = (1+2i)^2 \qquad \text{et} \qquad z^2 = \overline{-3-4i} = \overline{(1+2i)^2} = \overline{(1+2i)}^2 = (1-2i)^2$$

D'où quatre solution : $S = \{1+2i; 1-2i; -1-2i; -1+2i\}$

Réponse de l'exercice 3

On note A, B, C et D les points d'affixe respectif $-2+i$, $-2-i$, 0 et -4. Et M le point d'affixe z.

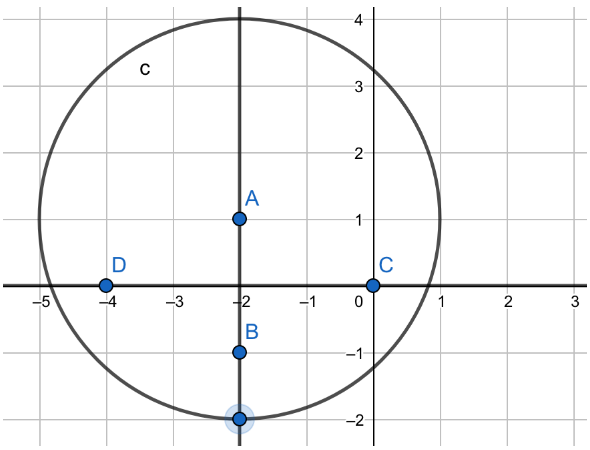
a) $|z+2-i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est cercle de centre A et de rayon 3.

b) $|z+2-i| = |z+2+i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in d$ où d est la médiatrice du segment $[AB]$.
Si l'on pose $z = x + iy$, on obtient :

$$\begin{aligned} |z+2-i| = |z+2+i| &\Leftrightarrow |(x+2) + i(y-1)|^2 = |(x+2) + i(y+1)|^2 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble cherché est l'axe des abscisses.

c) $|iz| = |-iz - 4i| \Leftrightarrow |i| \times |z| = |-i| \times |z+4| \Leftrightarrow CM = DM \Leftrightarrow M \in \Delta$ où Δ est la médiatrice du segment $[CD]$. Comme C et D sont d'affixe réel, ils sont sur l'axe des abscisses et donc Δ est perpendiculaire à l'axe des abscisses. Le milieu de $[CD]$ est le point d'affixe $\dfrac{0-4}{2} = -2$. L'équation de Δ est donc $x = -2$ et c'est la droite (AB).



Réponse de l'exercice 4

Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).

1. La courbe de f passe par $A(0\ ;\ 0.5)$ donc $f(0) = 0,5$.
   La droite (AB) est la tangente en $A(0\ ;\ 0,5)$.
   Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$.
2. Justifier que $a = 1$.
   En calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$
   $$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}.$$
   f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1+e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$. On obtient ainsi le résultat voulu en appliquant la formule de dérivation précédente.
4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.
   La droite (AB) est la tangente en $A(0\ ;\ 0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.
   Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4\times 0,05 = 0,2$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.

Partie B

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

1. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   D'après la partie A, p est dérivable et sa dérivée est, en prenant $b = 0,2$,
   $$p'(x) = \frac{0,2\mathrm{e}^{-0,2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0,2x})^2}$$
   Pour tout réel x positif, on a $0,2\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $p'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ainsi, p est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-0,2x} = 1$ par propriété de l'exponentielle et composée de fonctions. Ainsi, on a, par quotient de limites
   $$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-0,2x} = +\infty$ par propriété de l'exponentielle et composée de fonctions. Ainsi, on a, par quotient de limites
   $$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$$

(c) Dressez le Tableau de variation de p :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	0.95	$\nearrow$	1

2. (a) D'après le tableau de variation l'équation $p(x) = 0,95$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (b) A la calculatrice on obtient :

x	14,72	14,73
$f(x)$	0,9499	0,9501

   Donc $\alpha \simeq 0,95 \quad \text{à} \quad 10^{-2} \quad \text{près}$

   (c) Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$f(x) > 0,95 = f(\alpha) \Leftrightarrow x > \alpha$$

Partie C

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

   Cette proportion est $p(10) = \dfrac{1}{1 + e^{-2}} \approx 0,88$.

2. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

   Dans le contexte de l'énoncé, plus les années x s'écoulent, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.

   La saturation se produira au cours de l'année $x = 15$, donc en 2015.

   Remarque : on pourrait procéder par « tâtonnements », et voir que ça marche à partir de $x = 15$, mais il faut tout de même l'expliquer par l'inéquation $p(x) > 0,95$.