DS 4 du 19 décembre.

Exercice 1

On définie la suite (ω_n) définie à valeur dans $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \omega_{n+1} = \dfrac{i}{2}\omega_n + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de ω_1, ω_2 et ω_3.
2. Résoudre l'équation $z = \dfrac{i}{2}z + 1$
3. On pose $W_n = \omega_n - \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$
   (a) Montrer que $W_{n+1} = \dfrac{i}{2}W_n$
   (b) Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)$$
   (c) En déduire l'expression de ω_n en fonction de n.
4. On note $\alpha_n = |W_n|$.
   (a) Montrer que $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5 \times 2^{n-1}}$
   (b) En déduire la limite de α_n.
   (c) Si l'on note M_n les points d'affixes ω_n et M le point d'affixe $\dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$. Comment interpréter le résultat précédent.

Exercice 2

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

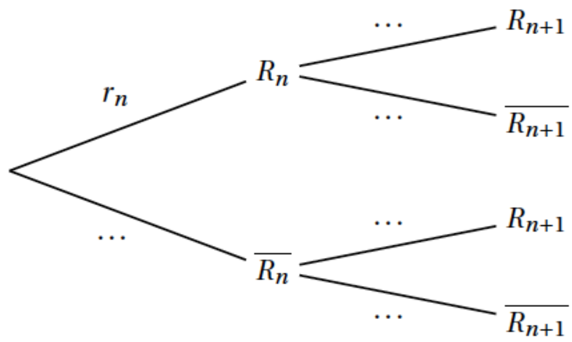
— à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;

— si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;

— si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.
   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.
   (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

(d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   .

   (c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

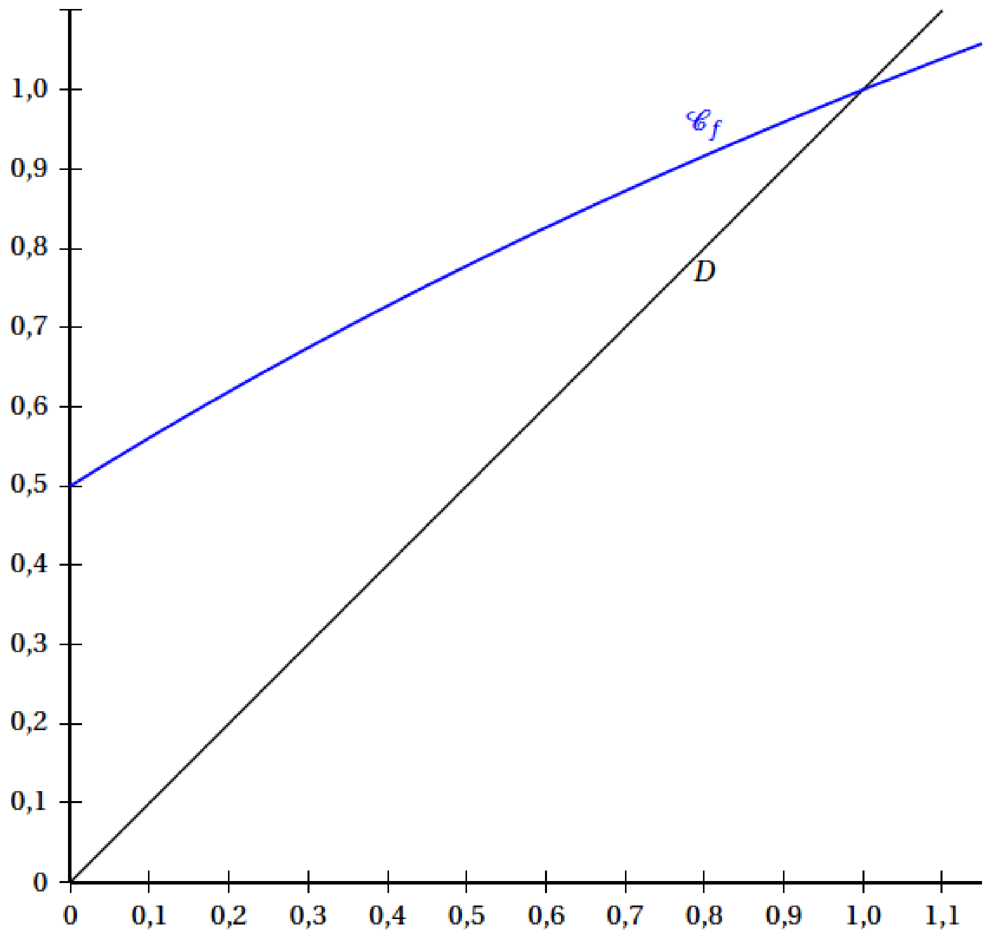
(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

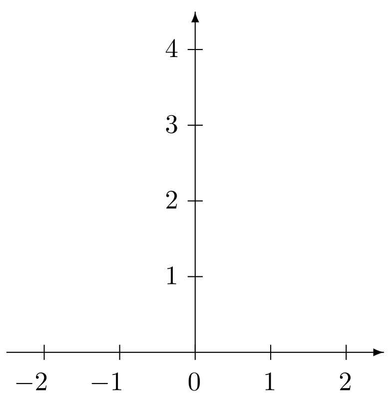
$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe

À rendre avec la copie





4

3

2

1

-2 -1 1 2

Réponse de l'exercice 1

1. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \dfrac{i}{2} + 1$ et $\omega_3 = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{i}{2}+1\right) + 1 = \dfrac{i}{2} + \dfrac{3}{4}$ et $\omega_4 = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{i}{2}+\dfrac{3}{4}\right)+1 = \dfrac{3i}{8} + \dfrac{3}{4}$

2. $z = \dfrac{i}{2}z + 1 \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{i}{2}\right) z = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{1-\dfrac{i}{2}} = \dfrac{1+\frac{i}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}\left(1+\dfrac{i}{2}\right)$

3. (a) $W_{n+1} = \omega_{n+1} - \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i = \dfrac{i}{2}\omega_n + 1 - \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i = \dfrac{i}{2}\left(W_n + \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i\right) + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i = \dfrac{i}{2}W_n + \dfrac{2}{5}i - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i = \dfrac{i}{2}W_n$

   (b) On pose $P_n : \ W_n = -\left(\dfrac{i}{2}\right)^n \left(-\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right)$ (pour $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : $W_0 = \omega_0 - \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$ et $\left(\dfrac{i}{2}\right)^0 \left(-\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$. Donc P_0 est vrai.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vrai. Alors :

$$W_{n+1} = \frac{i}{2}W_n = \frac{i}{2}\left(\frac{i}{2}\right)^n \left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} \left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)$$

   Donc on a montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)$$

   (c) On a donc $\omega_n = W_n + \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i = \left(\dfrac{i}{2}\right)^n \left(-\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) + \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}i$

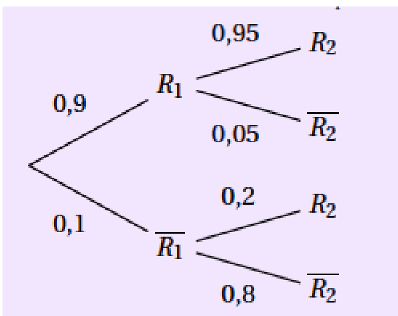
4. (a) $\alpha_n = |W_n| = \left|\left(\dfrac{i}{2}\right)^n \left(-\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right)\right| = \left|\left(\dfrac{i}{2}\right)^n\right| \left|-\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right| = \left|\dfrac{i}{2}\right|^n \times \dfrac{\sqrt{20}}{5} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5 \times 2^{n-1}}$

   (b) Puisque $2 > 1$, on a $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2^{n-1} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{\sqrt{5}}{5 \times 2^{n-1}} = 0$

   (c) On a $MM_n = \left|\omega_n - \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i\right| = \left|W_n\right| = \alpha_n$. Donc le résultat précédent signifie que la longueur MM_n tend vers 0. Donc les points M_n se "rapproche" du point M quand n tend vers $+\infty$.

Réponse de l'exercice 2

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.



   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$$

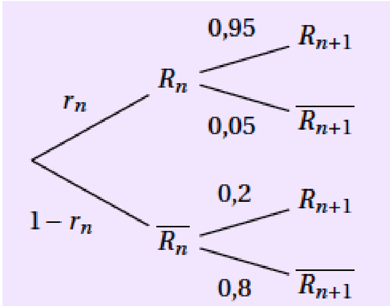
   (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = 0,855 + P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,855 + 0,1 \times 0,2 = 0,875$$

   (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

$$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P_{\overline{R_1}}(R_2)}{P(R_2)} = \frac{0,02}{0,875} \simeq 0,023 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



   (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n}\right) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0,95 + (1-r_n) \times 0,2 = 0,75r_n + 0,2 \end{aligned}$$

   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, P_n : " $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$ ".
   Initialisation : $0,1 \times 0,75^{1-1} + 0,8 = 0,9$. Or la probabilité pour que le client ramène la bouteille à l'issue de la première semaine est bien $r_1 = 0,9$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'expression de r_n soit $0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$. Alors :

$$r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2 = 0,75\left(0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\right) + 0,2 = 0,1 \times 0,75^n + 0,75 \times 0,8 + 0,2 = 0,1 \times 0,75^n + 0,8$$

   On a donc montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$$

   (d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   On a $|0,75| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0,8$. On en déduit qu'avec le temps, la proportion de client rendant la bouteille se stabilise à 0,8.

Réponse de l'exercice 3

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

1. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.
2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$
   Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,4]$.
3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation
   On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,4]$, on
   $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
   $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

4. (a) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.
   (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :
   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$
   .
   (c) De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :
   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$
   On en dédit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell+\ell-2=0$.
   Or $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
   $\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Voir à la fin l'annexe. l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.
2. (a) $1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$.
   (b) *Initialisation* pour $n=0$, $\quad 1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.
   On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.
   Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   On a $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :
   $1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :
   $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
   quel que soit le naturel n, $\quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :
   $$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

À rendre avec la copie