DS 4 : Fonctions trigonométriques et loi binomiale.

Exercice 1. ABCD est un tétraèdre. M, N, P et Q sont les points définis pas :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.

2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

3. Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.

Correction :

1.

2.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

3. Donc :

$$2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MQ} = 2\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MP}$$

Donc les trois vecteurs sont coplanaires et les 4 points, M, N, P et Q sont coplanaires.

Exercice 2. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < 0,9u_n < 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

Corrigé

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.
Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 0,3 \\ u_{n+1} & = 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002. $u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,189$; le nombre de tortues en 2001 est 189.

$u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1-0,189) \approx 0,138$; le nombre de tortues en 2001 est 138.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < 0,9u_n < 1$.

Montrons d'abord pour tout entier naturel n, u_n appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

Initialisation : $0 < u_0 = 0,3 < 1$ donc vrai au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 < u_n < 1$. donc $0 < 1-u_n < 1$. Donc $0 < u_n(1-u_n) < 1$ et enfin $0 < 0,9u_n(1-u_n) < 0,9 < 1$.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,1[$. C'est aussi le cas de $1-u_n$ aussi.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 1$. Donc $0 < 1-u_n < 1$ et $0 < 0,9u_n < 0,9 < 1$. Donc n $0 < 0,9u_n(1-u_n) < 0,9u_n < 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$. On sait que, pour tout n, $u_n \in [0\,;\,1]$; donc $u_n \geqslant 0$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

- **Initialisation**
Pour $n=0$: $u_0=0{,}3$ et $0{,}3\times 0{,}9^0=0{,}3$ donc $u_0\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^0$.
La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
On suppose que, pour $n\geqslant 0$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $u_n\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^n$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.
D'après la question précédente : $u_{n+1}\leqslant 0{,}9u_n$.
D'après l'hypothèse de récurrence : $u_n\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^n$.
On déduit : $u_{n+1}\leqslant 0{,}9\times 0{,}3\times 0{,}9^n$ c'est-à-dire : $u_{n+1}\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^{n+1}$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.
- **Conclusion**
La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n=0$, et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout n, $u_n\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^n$, et on a donc par conséquence : $0\leqslant u_n\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues? $-1<0{,}9<1$ donc la suite géométrique $(0{,}9^n)$ a pour limite 0 ;
on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3\times 0{,}9^n=0$.
On sait que, pour tout n, $0\leqslant u_n\leqslant 0{,}3\times 0{,}9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

Exercice 3. Résoudre les équations sur l'intervalle indiqué :

a) $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $\cos(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi,\pi]$.

c) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ sur $[0,\pi]$

d) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$ sur $[0,\pi]$

Correction :

a) $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\sin(x)=\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}(2\pi)\\ x=\dfrac{5\pi}{6}\quad(2\pi)\end{cases}.$$

Donc l'ensemble solution sur $\mathbb{R}$ est $S=\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos(x)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi,\pi]$.

$$\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-\pi}{6}\quad(2\pi)\\ x=\dfrac{\pi}{6}\quad(2\pi)\end{cases}.$$

Donc l'ensemble solution sur $[-\pi,\pi]$ est $S=\left[\dfrac{-\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$

c) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ sur $[0,\pi]$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{3}\quad(2\pi)\\ 2x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{-\pi}{3}\quad(2\pi)\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{-\pi}{6}\quad(2\pi)\\ 2x=\dfrac{-\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{-5\pi}{6}\quad(2\pi)\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-\pi}{12}\quad(\pi)\\ x=\dfrac{-5\pi}{12}\quad(\pi)\end{cases}.$$

Donc l'ensemble solution sur $[0,\pi]$ est $S=\left\{\dfrac{11\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right\}$

d) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$ sur $[0,\pi]\Leftrightarrow x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ Donc l'ensemble solution sur $\left[\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}\right]$

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x)=\sin(2x)-2\sin(x)+2x$.

1. Réduction de l'intervalle d'étude

a. Montrer que f est impaire.

b. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = f(x) - 4\pi$. (C'est-à-dire qu'il suffira de représenter la fonction f sur $[-\pi, \pi]$ puis d'effectuer des translations de vecteur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 2\pi \\ 4\pi \end{pmatrix}$ ou $-\vec{u}$ pour obtenir l'ensemble de la représentation de la fonction f)

2. On décide d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

a. Déterminer la fonction dérivée f'.

b. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $f'(x) = P(\cos(x))$.

c. Déterminer le tableau de signe du polynôme P sur $[-1, 1]$.

d. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

Correction :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x) + 2x$.

1. Réduction de l'intervalle d'étude

a. Montrer que f est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x) - 2x = -\sin(2x) + 2\sin(x) - 2x = -f(x)$$

Donc f est impaire.

b. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = f(x) - 4\pi$. (C'est-à-dire qu'il suffira de représenter la fonction f sur $[-\pi, \pi]$ puis d'effectuer des translations de vecteur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 2\pi \\ 4\pi \end{pmatrix}$ ou $-\vec{u}$ pour obtenir l'ensemble de la représentation de la fonction f)

$$f(x+2\pi) = \sin(2(x+2\pi)) - 2\sin(x+2\pi) + 2(x+2\pi) = \sin(2x) - 2\sin(x) + 2x + 4\pi = f(x) + 4\pi$$

2. On décide d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

a. Déterminer la fonction dérivée f'.

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos(x) - 2 = -2(2\cos^2(x) - 1) - 4\cos(x) - 2 = 4\cos^2(x) - 2\cos(x)$$

b. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $f'(x) = P(\cos(x))$.

Donc $f'(x) = P(\cos(x))$ en posant $P(t) = 4t^2 - 2t = 4t\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$.

c. Déterminer le tableau de signe du polynôme P sur $[-1, 1]$.

t	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$4t$		$+$	0	$-$		$-$	
$t - \frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$.

On obtient $f'(x) = P(\cos(x))$. Or $\cos(x) \in [-1, 1]$.

On cherche quand $f'(x)$ est négative et pour cela il faut résoudre sur $[0, \pi]$ l'inéquation $0 \leqslant \cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\pi - 2$	$\nearrow$	2π

D'où la représentation graphique de f

e. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

Exercice 5. Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geqslant 10) \approx 0,588$ et $P(Z \geqslant 10) \approx 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
On note A, B, C et M les évènements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ?
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

Correction : Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd auxun point si sa réponse est fausse.

On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

a. Anselme répond au hasard à chaque question donc il a une probabilité de répondre juste à une question de $p = \frac{1}{4}$.
Il y a 20 questions qui sont indépendantes donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bonnes réponses d'Anselme, donc sa note, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

b. À l'aide de la calculatrice, l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$ est $0,014$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geqslant 10) \approx 0,588$ et $P(Z \geqslant 10) \approx 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
On note A, B, C et M les événements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;

- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.

La probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara est $P_M(B)$ soit $\dfrac{P(B \cap M)}{P(M)}$.

- On choisit au hasard la copie d'un des trois candidats donc $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$.
- $P(B \cap M) = P(B) \times P_B(M)$.
  D'après le contexte, $P_B(M) = P(Y \geqslant 10)$ donc $P(B \cap M) = \dfrac{1}{3} \times 0,588$.
- D'après la formule des probabilités totales
  $P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) = P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M)$
  $= P(A) \times P(X \geqslant 10) + P(B) \times P(Y \geqslant 10) + P(C) \times P(Z \geqslant 10)$
  $= \dfrac{1}{3} \times 0,014 + \dfrac{1}{3} \times 0,588 + \dfrac{1}{3} \times 0,962 = \dfrac{1,564}{3}$

Donc $P_M(B) = \dfrac{\frac{0.588}{3}}{\frac{1,564}{3}}$ dont l'arrondi au millième est $0,376$.

Exercice 6. *Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.*

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

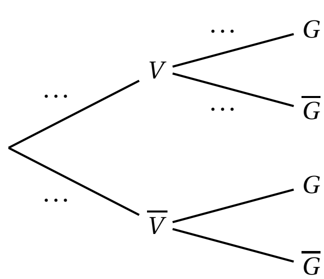
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.
   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

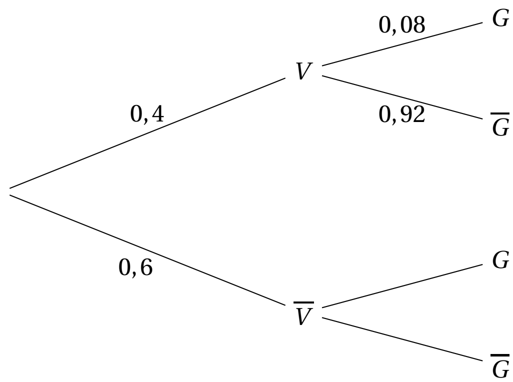
Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Correction :
Partie A

1. **a.** $P(G) = 0,2$ car 20% de la population a contracté la grippe.
   b. On obtient :



2. On calcule $P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$ soit 3,2% de chances que la personne ait contractée la grippe et soit vaccinée.
3. On calcule $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$

   D'après la formule des probabilités totales, $P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G)$.

   Donc $P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(G) - P(V \cap G) = 0,2 - 0,032 = 0,168$ puis $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$.
   La probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

1. Il s'agit de n expériences aléatoires identiques et indépendantes à 2 issues (la personne est vaccinée ou non) avec une probabilité de succès de $0,4$.

   La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;\ 0,4)$.
2. Avec la loi $\mathscr{B}(40\ ;\ 0,4)$
   a. $P(X = 15) \approx 0,123$
   b. $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 0,130$
3. On calcule $P(1450 < X < 1550) = P\left(\dfrac{1450 - 1500}{30} < Z < \dfrac{1550 - 1500}{30}\right) = P\left(\dfrac{-5}{3} < Z < \dfrac{5}{3}\right) \approx 0,904$