DS 4 : Suites et dérivation globale.

Exercice 1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 telle que : $u_4 = 62$ et $u_{14} = 172$. Déterminer la raison et u_0.

Déterminer la somme : $u_4 + u_5 + ... + u_{14}$.

Exercice 2. En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait 1000 milliers de clients, . Depuis, chaque année, l'opérateur perd 5 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 9 milliers de nouveaux clients.

1. Justifier que la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1000 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 9$$

   Le terme u_n donne une estimation du nombre de clients pour l'année $2010 + n$.
2. Pour étudier la suite (u_n), on considère la suite(v_n) par définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 180$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous déterminerez la raison et le première terme.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n entier naturel.

Exercice 3. Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance.

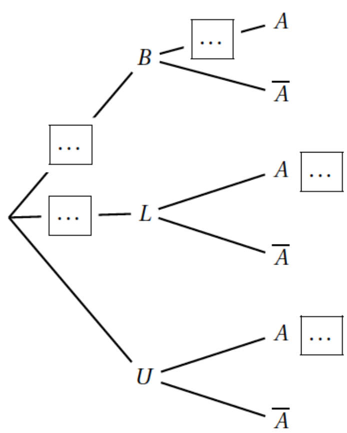
Une étude statistique a permis d'établir que :

- 30 % des clients ont loué une berline et 10 % ont loué un véhicule de luxe.
- 30 % des clients qui ont loué une berline ont choisi l'option d'assurance.
- 10 % des clients ont loué un véhicule de luxe et ont choisi l'option d'assurance.
- 21 % des clients ont loué un véhicule utilitaire et ont choisi l'option d'assurance.

On prélève au hasard la fiche d'un client et on considère les évènements suivants :

- B : le client a loué une berline.
- L : le client a loué un véhicule de luxe.
- U : le client a loué un véhicule utilitaire.
- A : le client a choisi l'option d'assurance.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre avec les données de l'énoncé.
2. Quelle est la probabilité que le client ait loué une berline et ait choisi l'option d'assurance ?
3. Calculer la probabilité qu'un client ait choisi l'option d'assurance.
4. Calculer la probabilité que le client ait souscrit une assurance sachant qu'il a loué une voiture de luxe.
5. Calculer la probabilité que le client ait loué une voiture de luxe sachant qu'il a souscrit une assurance.



Exercice 4. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = (3x + 2)x^2$ d) $f(x) = \dfrac{-2x + 1}{x + 1}$

Exercice 5. .

Partie A

On considère la fonction f définie que $[0, 15]$ par :

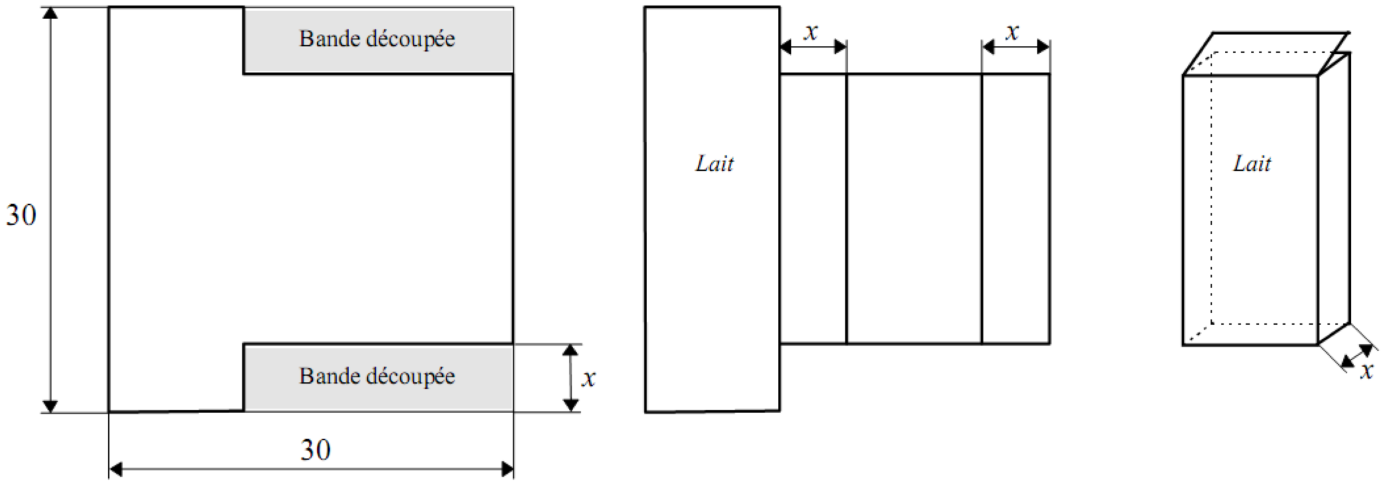
$$\forall x \in [0, 15],\ f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 15]$.

Partie B

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton. Au départ, il dispose d'une feuille carrée en carton dans laquelle on a retiré deux bandes de même largeur.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées.

1. Explique pourquoi les valeurs de x varient sur l'intervalle $[0, 15]$.
2. Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
3. En remarquant que $V = f$ utiliser la partie A pour déterminer la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ est maximal. Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.
4. (a) En utilisant le tableau de variation de la partie A, déterminer combien de valeurs de x permettent d'obtenir un volume de boite de $0,5$ c'est à dire 500 cm^3. Trouver un encadrement de ces solutions.

   (b) Montrer que
   $$V(x) - 500 = (x - 10)(2x^2 - 40x + 50)$$

   (c) Résoudre $2x^2 - 40x + 50 = 0$.

   (d) Déduire des questions précédentes les valeurs de x pour lesquelles le volume de la boites est égale à un demi litre.

Correction

Partie A

On considère la fonction f définie que $[0, 15]$ par :

$$\forall x \in [0, 15],\ f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

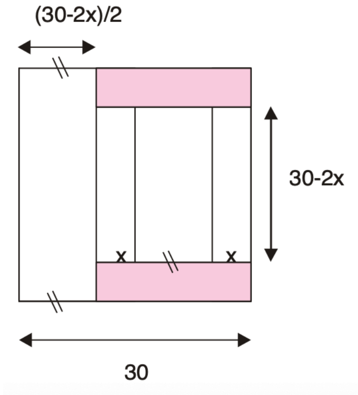
1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

$$f'(x) = 6x^2 - 120x + 450 = 6(x^2 - 20x + 75) = 6(x - 5)(x - 15)$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 15]$.

x	0	1	5		15
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	0	1000		0

Partie B :



Le volume de la boîte est $V = Longueur \times largeur \times profondeur$

Si on appelle x la profondeur, on a $Longueur = 30 - 2x$, $aprrofondeur = x$ et $largeur = \dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$ Donc :

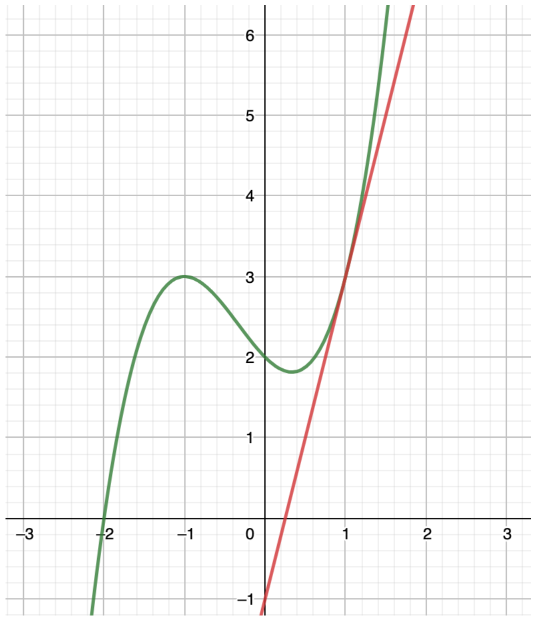
$$V(x) = (30 - 2x) \times (15 - x) \times x = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

Exercice 6. .

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} g & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^3 + x^2 - x + 2 \end{array} .$$

On notera $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique que l'on a ci-contre. Sur cette représentation graphique nous avons représenter la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.



1. Déterminer graphiquement l'équation de la tangente T_4 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.
2. Déterminer la fonction dérivée de g.
3. Étudie le signe de $g'(x)$ en fonction de x et dresser le tableau de variation de g.
4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
5. Cette tangente T_0 recoupe la courbe $\mathscr{C}_g$ en un point dont on déterminera les coordonnées.
6. (bonus) On note h la fonction affine $h(x) = -x+2$. Étudier le signe de $f(x) - h(x)$ et en déduire la position de T_0 par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Correction :

1. Déterminer graphiquement l'équation de la tangente T_4 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

$$T_0 : \ y = 4x - 1$$

2. Déterminer la fonction dérivée de g.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

Donc $g'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et $1/3$. Il est négatif entre ses racines.

3. Étudie le signe de $g'(x)$ en fonction de x et dresser le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$	

4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0. La formule donnant la tangente en a est $T_a: \ y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Donc :

$$T_0: \ y = g'(0)(x-0) + f(0) = -x + 2$$

5. Cette tangente T_0 recoupe la courbe $\mathscr{C}_g$ en un point dont on déterminera les coordonnées.
   Pour déterminer l'intersection entre T_0 et $\mathscr{C}_g$, nous devons résoudre :

$$f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

   Donc l'on trouve deux points d'intersection les points de coordonnées $(-1, 3)$ (car $g(-1) = 3$) le point de tangence $(0, 2)$.

6. (bonus) On note h la fonction affine $h(x) = -x + 2$. Étudier le signe de $f(x) - h(x)$ et en déduire la position de T_0 par rapport à $\mathscr{C}_g$.
   On doit étudier le signe de l'expression :

$$f(x) - h(x) = x^2(x+1)$$

   Or $x^2 \geqslant 0$ donc le signe dépend uniquement de $x + 1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$+$	
position		$T_0/\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_g/T_0$		$\mathscr{C}_g/T_0$	