DS 4 : Fonctions trigonométriques et loi binomiale.

Exercice 1. ABCD est un tétraèdre. M, N, P et Q sont les points définis pas :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.
2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$
3. Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.

Exercice 2. On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} &= 0,032 \\ v_{n+1} &= 1,06 v_n (1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1,06x(1-x)$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n < 0,5$.
4. Justifier que (v_n) converge.

Exercice 3. Résoudre les équations sur l'intervalle indiqué :

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $\sin(x) \geqslant \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

c) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0, \pi]$

d) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[0, \pi]$

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(x) = -\sin(2x) - 4\sin(x) - 2x$.

1. Réduction de l'intervalle d'étude
   - **a.** Montrer que f est impaire.
   - **b.** Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = f(x) - 4\pi$. (C'est-à-dire qu'il suffira de représenter la fonction f sur $[-\pi, \pi]$ puis d'effectuer des translations de vecteur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 2\pi \\ -4\pi \end{pmatrix}$ ou $-\vec{u}$ pour obtenir l'ensemble de la représentation de la fonction f)
2. On décide d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
   - **a.** Déterminer la fonction dérivée f'.
   - **b.** Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $f'(x) = P(\cos(x))$.
   - **c.** Déterminer le tableau de signe du polynôme P sur $[-1, 1]$.
   - **d.** Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

Exercice 5. Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 6. Dans ce problème, les résultats seront arrondis au millième. On estime que la proportion de malade dans la population est égale à 0,1. La maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On considère une population de 100 personnes, toutes choisies indépendamment les unes des autres. On forme, au hasard, 10 groupes de 10 personnes. Au lieu de tester les 100 personnes individuellement, on teste le mélange des prélèvements sanguins d'un groupe de 10. Si le test est négatif, on considère que les 10 personnes sont saines et on est dispensé de 10 tests individuels. Si le test est positif, une personne au moins du groupe est atteinte de la maladie et il faut alors tester individuellement les 10 personnes du groupe ; dans ce cas, on doit effectuer 11 tests.

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades dans un groupe de 10 personnes.
   - **a.** Quelle est la loi de Y ?
   - **b.** Calculer la probabilité pour que, dans un groupe, on n'observe aucune personne malade.
   - **c.** Calculer la probabilité pour que, dans un groupe, on observe au moins une personne malade.On admettra, dans la suite de l'exercice, que la probabilité d'observer au moins une personne malade dans un groupe est égale à 0,651.
2. On considère la variable aléatoire N égale au nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes, et par X la variable aléatoire égale au nombre de groupes pour lesquels le test est positif.
   - **a.** Exprimer N en fonction de X.
   - **b.** Quelle est la loi de probabilité de X ?
   - **c.** Calculer $P(N = 110)$ et $P(N = 90)$.
3. On admet que, si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, alors, pour tous réels a et b, on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.
   Calculer $E(N)$. Interpréter le résultat.
4. Afin de réduire les coûts, on cherche à optimiser la taille des groupes. On note n la taille des k groupes égaux.On reste sur une population de taille 100. On a donc $k \times n = 100$.On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tests positifs dans un groupe de taille n et X_n la variable aléatoire égale au nombre de groupes de taille n pour lequel le test est positif.
   - **a.** Montrer que $P(Y_n \geqslant 1) = 1 - 0,9^n$.
   - **b.** Montrer que X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(k; 1 - 0,9^n)$.
   - **c.** On note N la variable aléatoire égale au nombre de tests à effectuer avec cette répartition en k groupes de taille n.Démontrer que $N = nX_n + k$.
   - **d.** En déduire que :
     $$E(N) = k + kn(1 - 0,9^n) = 100\left(1 - 0,9^n + \frac{1}{n}\right)$$
   - **e.** À l'aide de la calculatrice, déterminer la taille optimale n et le nombre de groupes k à constituer.