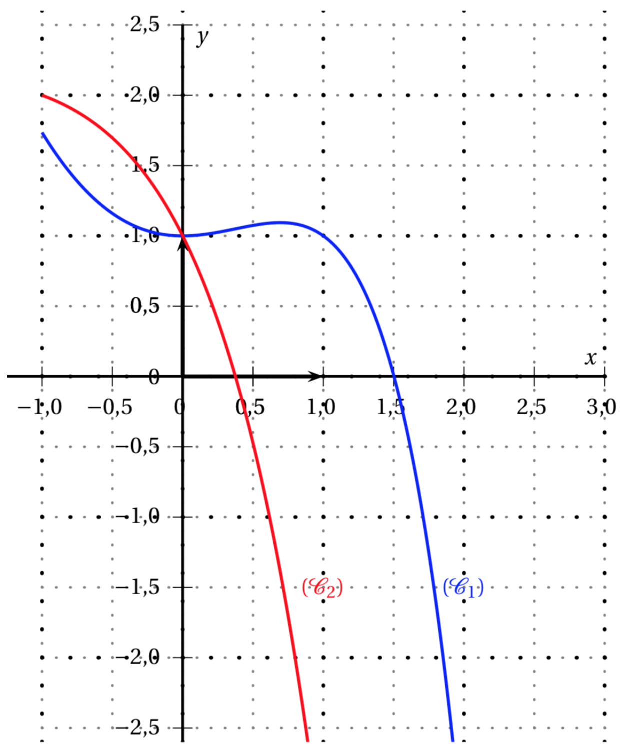
# DS 4 : Suites numériques et fonction exponentielle.

Consignes :

- Durée 1h.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

**Exercice 1.** La courbe $(\mathcal{C}_1)$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur $[-1\ ;\ 2]$.




- On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$.
- La courbe $(\mathcal{C}_2)$ ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction $f''$.
- Le point A$(0\,;\,1)$ est situé sur la courbe $(\mathcal{C}_1)$.
- La tangente à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point A est horizontale.
- Le point B est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_2)$ avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse $b$ de B est $b \simeq 0,37$.
- On note $D$ le point de $(\mathcal{C}_1)$ d'abscisse $b$.

1. Par lecture graphique,
   (a) Donner la valeur de $f(0)$.
   (b) Donner la valeur de $f'(0)$.
   (c) Étudier la convexité de $f$ sur $[-1\ ;\ 2]$ et les point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_1)$. Justifier la réponse.
2. On admet désormais que la fonction $f$ est définie pour tout réel $x$ dans $[-1\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + x^2.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | $f(x) :\ = (1-x)*\exp(x)+x^2$ <br> $\rightarrow (1-x)\mathrm{e}^x + x^2$ |
| 2 | factoriser( dériver($f(x)$)) <br> $\rightarrow x\,(2-\mathrm{e}^x)$ |

(a) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[-1\ ;\ 2]$.

3. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha$ dans $[-1\ ;\ 2]$.

   (b) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $0,01$.

4. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_1)$ au point d'abscisse 1.

5. On note $F$ la fonction définie sur $[-1\ ;\ 2]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + (-x+2)\mathrm{e}^x$$

   (a) Vérifiez que :

$$F'(x) = f(x)$$

   (b) Déterminer une valeur approchée de $F(2) - F(1)$.

**Exercice 2.** Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions $f$ et $g$ définies par : pour tout réel $x$ de $[0\ ;\ 1]$,

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

## Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | dériver $(1-x) * \exp(3x)$ <br> : $-3x * \exp(3 * x) + 2 * \exp(3 * x)$ |
| 2 | factoriser $-3x * \exp(3 * x) + 2 * \exp(3 * x)$ <br> : $\exp(3x) * (-3x + 2)$ |
| 3 | factoriser(dériver(exp($3x$)($-3x+2$))) <br> : $3 * \exp(3 * x)(1 - 3x)$ |

1. Éudier sur $[0\ ;\ 1]$ le signe de la fonction dérivée $f'$, puis donner le tableau de variation de $f$ sur $[0\ ;\ 1]$ en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

## Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ et $(0\,;\,1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. On admet que : pour tout $x$ dans $[0\,;\,1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\left(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x\right)$.
   (a) Justifier que pour tout x dans $[0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout $x$ dans $[0\,;\,1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.
   (c) Éudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout $x$ dans $[0\,;\,1]$.

**Exercice 3** **5 points**

**Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L**

En 2015, les forêts couvraient environ 4 000 millions d'hectares sur terre. On estime que, chaque année, cette surface diminue de 0,4 %. Cette perte est en partie compensée par le reboisement, naturel ou volontaire, qui est estimé à 7,2 millions d'hectares par an.

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4\,000$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,996 \times u_n + 7,2$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ permet d'obtenir une estimation de la surface mondiale de forêt, en millions d'hectares l'année $2015 + n$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la première année pour laquelle la surface totale de forêt couvre moins de 3 500 millions d'hectares sur terre.

| | |
|---|---|
| Variables : | $N$ est un entier naturel |
| | $U$ est un nombre réel |
| Initialisation : | Affecter à $N$ la valeur 2015 |
| | Affecter à $U$ la valeur 4 000 |
| Traitement : | |
| Sortie : | Afficher $N$ |

3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 1800$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique puis préciser son premier terme et sa raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2\,200 \times 0,996^n + 1\,800$.
   (c) Selon ce modèle et si le phénomène perdure, la surface des forêts sur terre va-t-elle finir par disparaître ? Justifier la réponse.
4. Une étude montre que, pour compenser le nombre d'arbres détruits ces dix dernières années, il faudrait planter 140 milliards d'arbres en 10 ans.

   En 2016 on estime que le nombre d'arbres plantés par l'Organisation des Nations unies (ONU) est de 7,3 milliards.

   On suppose que le nombre d'arbres plantés par l'ONU augmente chaque année de 10 %.

   L'ONU peut-elle réussir à replanter 140 milliards d'arbres de 2016 à 2025 ?

   Justifier la réponse.