DS 5 : Produit scalaire, convexité et logarithme

Exercice 1. Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;

1. On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Anselme.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

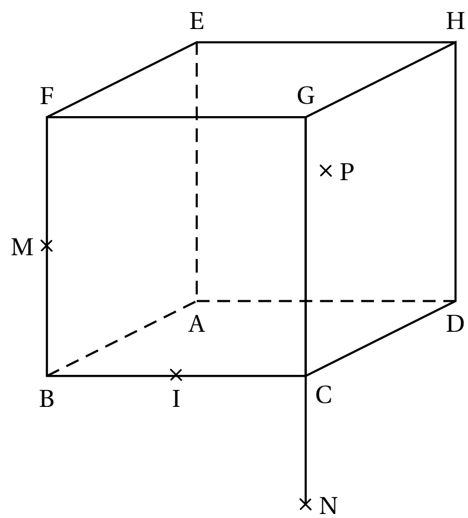
b. À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$.

Exercice 2. .

Rappel de cours :
On rappelle que : Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite d et B un point de d. Si H est le projeté orthogonal de A sur d alors :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||^2}\overrightarrow{u}$$

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation
$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.

2. Construire, sur la figure la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
Vous pourrez utiliser les coordonnées des points présents sur la figure sans les justifier.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

2. Déterminer la distance de G au plan (MNP).

3. Distance de P à la droite (MI).

a. Déterminer le projeté orthogonal de P sur la droite (MI). Vous utiliserez le rappel de cours.

b. Déterminer la distance de P à la droite (MI).

4. Étude du quadrilatère $(EDIM)$.

a. Justifier que les droites (ED) et (MI) sont parallèles et en déduire que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires.

b. En déduire que l'aire du quadrilatère (MEDI) est $\dfrac{9}{8}$ unités d'aire.

c. Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

Exercice 3. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Pour le reste de l'énoncé, on posera $f(0) = 0$ de sorte que la fonction et définie et continue en 0.

2. Étude de la convexité.

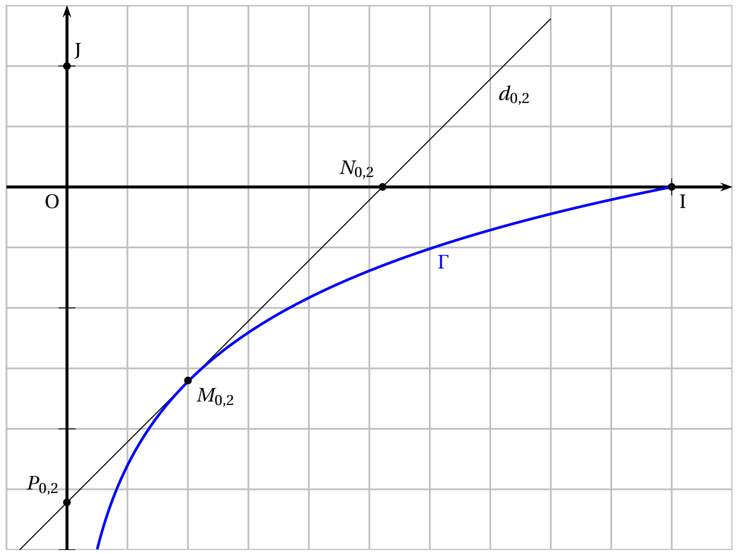
a. Vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

b. En déduire la convexité de la fonction f.

c. Donner les points d'inflexions s'il y en a.

3. On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a.
Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

a. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



i. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

ii. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

iii. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$.
Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

b. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.