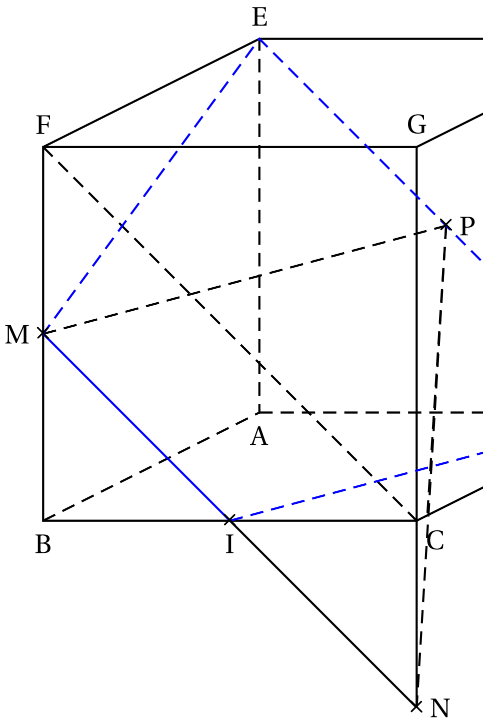
↜ Corrigé DS 5 ↝

Exercice 2

Rappel de cours :
On rappelle que : Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite d et B un point de d. Si H est le projeté orthogonal de A sur d alors :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$$

On considère un cube ABCDEFGH.
Le point M est le milieu de [BF], I est le milieu de [BC], le point N est défini par la relation $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ et le point P est le centre de la face ADHE.



Partie A :

1. Justifier que la droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I.

Solution : On a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{NC}$ donc le quadrilatère BMCN est un parallélogramme donc droite (MN) coupe le segment [BC] en son milieu I (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

2. Construire, sur la figure la section du cube par le plan (MNP).

Partie B :

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

Solution : Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\0\end{pmatrix}$. Or

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MN} = 1\times 0 + 2\times 1 - 2\times 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MP} = -1+1+0 = 0$$

2. Déterminer la distance de G au plan (MNP).

Solution : La distance de G au plan (MNP) :

$$d(G,(MNP)) = \frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{GM}|}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{|1\times 0+2\times(-1)+2\times(-1/2)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

3. Étude du quadrilatère $(EDIM)$.

a. Déterminer le projeté orthogonal H de P sur la droite (MI). Vous commencerez par déterminer un vecteur directeur de la droite (MI).

Solution : $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ est une vecteur directeur de la droite (MI). Donc :

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PI} - \frac{\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{MI}}{||\overrightarrow{MI}||^2}\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{PI} - \frac{1\times 0+0\times 1/2-1/2\times(-1/2)}{1/2}\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{PI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$$

$$\overrightarrow{PH}:\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1/4\\-1/4\end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad H(1,1/4,1/4)$$

b. Déterminer la distance de P à la droite (MI).

Solution :

$$PH = \sqrt{1^2+1/4^2+1/4^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

4. **a.** Justifier que les droites (ED) et (MI) sont parallèles et en déduire que les quatre points M, E, D et I sont coplanaires.

Solution : Par le théorème des milieux, on a $\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{MI}$ or $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$. Donc $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{MI}$. Les droites (ED) et (MI) sont donc parallèles et donc coplanaires. Donc M, E, D et I sont coplanaires.

b. En déduire que l'aire du quadrilatère (MEDI) est $\frac{9}{8}$ unités d'aire.

Solution :

$$Aire = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{9}{8}$$

c. Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

Solution :

$$V_{(\text{GMEDI})} : \frac{1}{3}\mathscr{A}(\text{AEDI}) \times \text{GK} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{8} \times 1 = \frac{3}{8} \text{ unité de volume.}$$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

a. Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x+1)(\ln x-1)$.

Solution :

f est dérivable sur $]0\,;\,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,1]$.

$f = uv^2 \implies f' = u'v^2 + 2uv'v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1-\ln(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$\forall x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = \left(1-\ln(x)\right)^2 - 2\left(1-\ln(x)\right) = \left(1-\ln(x)\right)\left(1-\ln(x)-2\right)$

On a donc bien $\forall x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = \left(\ln(x)+1\right)\left(\ln(x)-1\right)$.

b. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; 1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

Solution :

- $\left(\ln(x)-1\right) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}$
- $\left(\ln(x)+1\right) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^{-1}$

x	0		e^{-1}		1		e		$+\infty$
$\ln x+1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$\ln x-1$	‖	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Étude de la convexité.

a. Vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

Solution :

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x-1) + \frac{1}{x}(\ln x+1) = \frac{2\ln x}{x}$$

b. En déduire la convexité de la fonction f.

Solution : Comme sur $[0, +\infty[$ x est positif, le signe de $f''(x)$ est celui de $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$convexit\acute{e}\ de\ f$		$concave$	0	$convexe$	

c. Point d'inflexion :

Solution : D'après la question précédente il y a un point d'inflexion pour $x = 1$ dont les coordonnées sont $(1, 1)$.

3. On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.
On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

a. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$.

i. Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

Solution : $\mathrm{O}N_{0,2} \approx 0,5$ et $\mathrm{O}P_{0,2} \approx 2,6$
On en déduit que l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ $\dfrac{0,5 \times 2,6}{2} = 0,65$ unités d'aire.

ii. Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

Solution : $\forall x \in]0\,;\,1]\, g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
$d_{0,2}$ est de coefficient directeur $g'(0,2) = \dfrac{1}{0,2} = 5$. On a donc $d_{0,2}\ :\ y = 5x + b$
Or $d_{0,2}$ passe par $M_{0,2}\left(0,2\,;\,\ln(0,2)\right)$, on en déduit $b = \ln(0,2) - 1 = -1 - \ln(5)$
Finalement $d_{0,2}\ :\ y = 5x - \ln(5) - 1$

iii. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$.

Solution : $\mathrm{O}P_{0,2} = |\ln(0,2) - 1| = 1 + \ln(5)$
$5x + \ln(0,2) - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1+\ln(5)}{5}$ donc $\mathrm{O}N_{0,2} = \dfrac{1+\ln(5)}{5}$
L'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est donc $\dfrac{(1+\ln(5))^2}{10} \approx 0,681$ unités d'aire.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\mathrm{O}N_aP_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

b. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Solution :
On remarque que $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}f(a)$ donc l'aire sera maximale si $f(a)$ est maximale
On en déduit que l'aire est maximale si $a = \mathrm{e}^{-1}$ et on a $\mathscr{A}\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{1}{2}f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 2\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{2}{\mathrm{e}} \approx 0,74$ unités d'aire.