DS 5 du 10 janvier 2022 : Durée 1h

Exercice 1 : Calculer la dérivée puis construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 50\ln(x) - x^2 - 4$$

On a :

$$f'(x) = \frac{50}{x} - 2x = \frac{2(25-x^2)}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(25-x^2)$ qui est du "signe de a entre les racine " qui sont 5 et -5. D'où le tableau de variation :

x	0		5		π
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$50\ln(5)-29$	$\searrow$	$-\infty$

- Limite en 0 :

$$\lim_{x\to 0} 50\ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} -x^2 - 4 = -4 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$:

$$f(x) = x^2\left(50\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 - \frac{4}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(50\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 - \frac{4}{x^2}\right) = -1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 2 : Calculer la dérivée puis construire le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 4x + 2e^{-2x}$$

On a : $g'(x) = 4 - 4e^{-2x} = 4\left(1 - e^{-2x}\right) > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-2x} \Leftrightarrow 0 > -2x \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- Limite en $-\infty$:

$$g(x) = 2e^{-2x}\left(2xe^{2x} + 1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 2e^{-2x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

- Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} 4x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} 2e^{-2x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Exercice 3 : Résoudre l'inéquation :

$$\ln(10x+2) \geqslant \ln(x+10)$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Correction :

- $10x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{-1}{5}$

- $x+10>0 \Leftrightarrow x>-10$

Donc $D=\left]\frac{-1}{5},+\infty\right[$

$$\ln(10x+2)\geqslant \ln(x+10) \Leftrightarrow 10x+2\geqslant x+10 \Leftrightarrow 9x\geqslant 8 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{8}{9}$$

Donc $S=\left[\frac{8}{9},+\infty\right[$

Exercice 4 : Résoudre l'inéquation :

$$\ln(-7x-28)\geqslant \ln(x-15)$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Correction :

- $-7x-28>0 \Leftrightarrow x<-4$
- $x+15>0 \Leftrightarrow x>-15$

Donc $D=]-15,-4[$

$$\ln(-7x-28)\geqslant \ln(x+15) \Leftrightarrow -7x-28\geqslant x+15 \Leftrightarrow -8x\geqslant 43 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{-43}{8}$$

Donc $S=\left]-15,\frac{-43}{8}\right]$

Exercice 5 : Résoudre l'inéquation :

$$-5\mathrm{e}^{8t+4}+4>0$$

Vous déterminerez dans un premier temps l'ensemble de définition, puis ensuite l'ensemble solution.

Correction :

$$-5\mathrm{e}^{8t+4}+4>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{8t+4}<\frac{4}{5} \Leftrightarrow 8t+4<\ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow t<\frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{4}{5}\right)-4\right]$$

Donc $S=\left]-\infty,\frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{4}{5}\right)-4\right]\right[$

Exercice 6 : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3+t \\ y & = & 2-2t \\ z & = & 2+t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+u \\ y & = & 1+u \\ z & = & 2+u \end{array}\right. ,u\in\mathbb{R}.$$

On note Δ la perpendiculaire commune à d et d' si elle existe.

1. Donner un vecteur directeur de d que vous noterez $\vec{u}$ et n vecteur directeur de d' que vous noterez $\vec{v}$, ainsi qu'un point de d que l'on notera A et un point de d' que l'on notera B.

   - d a pour vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et passe par le point $A(-3,2,2)$ (obtenu pour $t=0$)
   - d' a pour vecteur directeur $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(1,1,2)$ (obtenu pour $u=0$)

2. Ces deux droites sont-elles parallèle ? Sont-elles orthogonales ? Sont-elles sécantes ?

   - Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droite ne sont pas parallèle.
   - $\vec{u}.\vec{v}=1-2+1=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, et d et d' aussi.

- Pour déterminer un point d'intersection :

$$\begin{cases} x &= -3+t \\ y &= 2-2t \\ z &= 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= 1+u \\ y &= 1+u \\ z &= 2+u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Donc : $\begin{cases} 1+u &= -3+t \\ 1+u &= 2-2t \\ 2+u &= 2+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+u &= -3+t \\ 1+u &= 2-2t \\ 2+u &= 2+t \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{3}{5} \quad et \quad t = \dfrac{1}{3}$ Ce qui est impossible.

Donc les deux droite ne sont pas sécantes.

3. Parmi les trois vecteurs ci-dessous, indiquez celui qui est directeur de Δ :

- $\vec{s} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{w} : \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\vec{r} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme Δ est la perpendiculaire commune de d et d', tous vecteurs directeurs de Δ est orthogonal aux vecteurs directeurs directeurs respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de d et d' . Or seul $\vec{w}$ vérifie $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$. Donc $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ .

4. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites d' et Δ. Parmi les trois équation cartésienne ci-dessous, une et une seule est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$. Indiquez laquelle en justifiant.

a) $x-2y+z-1=0$ b) $x+y+z-4=0$ c) $-x+z-1=0$

Avec $u=-2$ on obtient $C(-1,-1,0)$ un point de d'. Or les coordonnées de C ne vérifie que l'équation a). C'est donc la seule possible pour $\mathscr{P}$.

5. Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et d.

Soit $M(-3+t, 2-2t, 2+t) \in d$:

$$-3+t-2(2-2t)+2+t-1=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$$

Donc l'intersection de $\mathscr{P}$ et d est le point $E(-2,0,3)$.

6. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

$$\begin{cases} x = -v-2 \\ y = 0 \\ z = v+3 \end{cases} \quad v \in \mathbb{R}$$

7. Parmi les coordonnées ci-dessous indiquez celles de l'intersection (que l'on notera E) de d et Δ et celles de l'intersection (que l'on notera F) de d' et Δ.

a) $(-2,0,3)$ b) $(1,1,2)$ c) $(0,0,1)$ d) $(1,1,1)$

$E(-2,0,3)$ est l'intersection de d et Δ voir question précédente. Et le point $F(0,0,1)$ est obtenue pour $u=-1$ pour la représentation paramétrique de d' et ses coordonnées vérifie l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

8. Déterminer la distance de d à d'.

$$EF = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

9. On note $M(-3t, 2-2t, 2+t)$ un point de d et $N(1+u, 1+u, 2+u)$ un point de d'.

a. Montrer que :

$$MN^2 = (u - t + 2)^2 + (u + 2t - 2)^2 + (u - t)^2 = 3u^2 + 6u + 6t^2 - 12t + 17$$

b. Déterminer les valeurs de u et de t pour que l'expression ci-dessus soit minimale et déterminer alors la valeur de MN.

$$MN^2 = (3u^2 + 6u + 6t^2 - 12t + 17 = 3(u + 1)^2 + 6(t - 1)^2 - 3 - 6 + 17 = 3(u + 1)^2 + 6(t - 1)^2 + 8 \leqslant 8$$

Cette expression est minimale pour $t = 1$ et $u = -1$ et vos alors 8. Dés lors $MN = 2\sqrt{2}$

c. Déterminer les coordonnées des points M et N pour ces valeurs de t et u.

Pour les valeurs $t = 1$ et $u = -1$ on obtient de nouveau les points E de d et F de d' trouvés à la question 7 (et aussi 5)