DS 5 : Produit scalaire et dérivation globale (lundi)

Exercice 1. .

Partie A

On considère la fonction f définie que $[0,15]$ par :

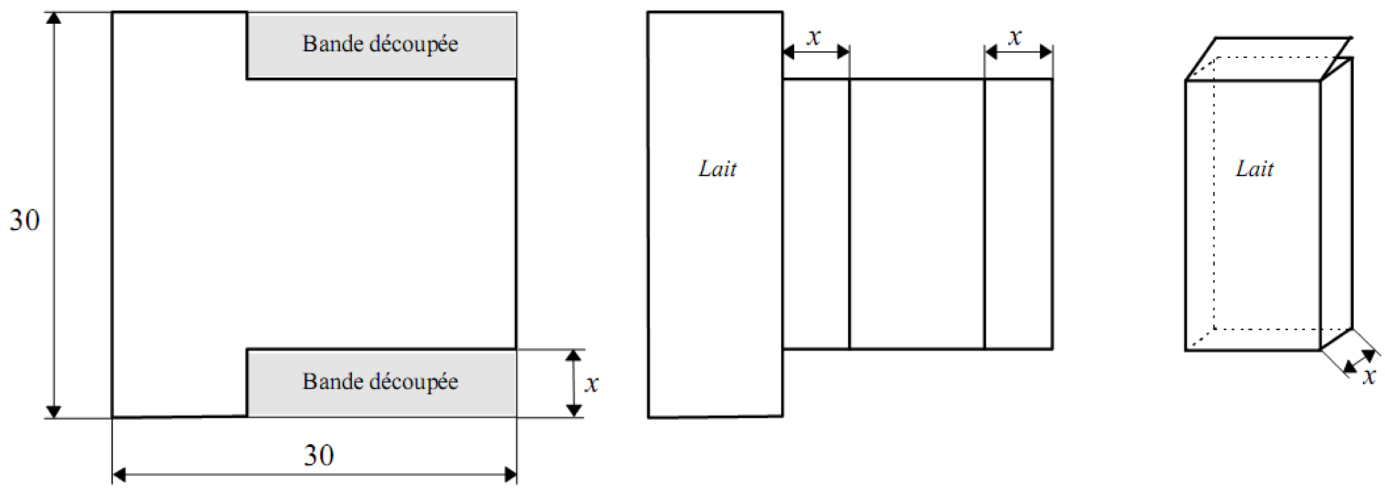
$$\forall x \in [0,15],\ f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,15]$.

Partie B

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton. Au départ, il dispose d'une feuille carrée en carton dans laquelle on a retiré deux bandes de même largeur.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées.

1. Explique pourquoi les valeurs de x varient sur l'intervalle $[0,15]$.
2. Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
3. En remarquant que $V = f$ utiliser la partie A pour déterminer la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ est maximal. Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.
4. (a) En utilisant le tableau de variation de la partie A, déterminer combien de valeurs de x permettent d'obtenir un volume de boite de $0,5$ c'est à dire 500 cm^3. Trouver un encadrement de ces solutions.

   (b) Montrer que
   $$V(x) - 500 = (x-10)(2x^2 - 40x + 50)$$

   (c) Résoudre $2x^2 - 40x + 50 = 0$.

   (d) Déduire des questions précédentes les valeurs de x pour lesquelles le volume de la boites est égale à un demi litre.

Correction :

Partie A

On considère la fonction f définie que $[0,15]$ par :

$$\forall x \in [0,15],\ f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

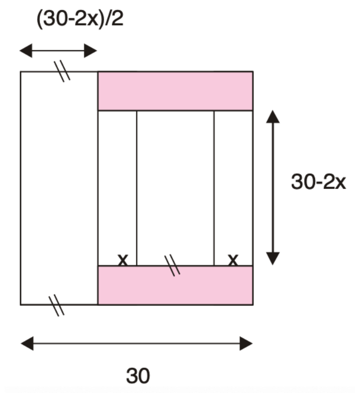
1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

$$f'(x) = 6x^2 - 120x + 450 = 6(x^2 - 20x + 75) = 6(x-5)(x-15)$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,15]$.

x	0		5		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1000	$\searrow$	0

Partie B :



Le volume de la boîte est $V = Longueur \times largeur \times profondeur$

Si on appelle x la profondeur, on a $Longueur = 30 - 2x$, $aprrofondeur = x$ et $largeur = \dfrac{30-2x}{2} = 15 - x$ Donc :

$$V(x) = (30-2x) \times (15-x) \times x = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

Exercice 2. .

On considère la fonction g définie sur $[-1; 2]$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Correction :

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$
Donc $g'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et $1/3$. Il est négatif entre ses racines.
2. Étudie le signe de $g'(x)$ en fonction de x et dresser le tableau de variation de g.

x	-1		$\frac{1}{3}$		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
g	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$	4

3. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1. La formule donnant la tangente en a est $T_a :\ y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Donc :

$$T_1 :\ y = \underbrace{g'(1)}_{0}(x-1) + \underbrace{g(1)}_{1} = 1$$

Exercice 3. 1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 14$, $AC = 18$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{196}{504}$. Déterminer la valeur de BC.

On utilise Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 14^2 + 18^2 - 2 \times 14 \times 18 \times \frac{196}{504} = \frac{7}{18} \qquad \text{donc} \quad BC = 18$$

2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \dfrac{5}{2}$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$. Calculer
   (a) $(3\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 6\|\vec{u}\|^2 + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2 = 6 \times \dfrac{25}{4} - 3 \times 10 - 3 \times \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}$
   (b) $(5\vec{u} - \vec{v})^2 = 25 \times \|\vec{u}\|^2 - 10 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 25 \times \dfrac{25}{4} + 10 \times 10 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{367}{2}$.

3. On considère un triangle ABC tel que $BA = 2$, $CB = 4$ et $AC = 3$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}(9 + 4 - 16) = \frac{-3}{2}$$

4. On considère un triangle ABC tel que $BC = 11$, $AB = 8$ et $CA = 5$. Calculer $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(BC^2 + BA^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}(121 + 64 - 25) = 80$$

$$\text{Donc} \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 80 \quad \text{donc} \quad \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{80}{11 \times 8} = \frac{10}{11}$$

5. On considère les points A et B du plan tels que $AB = 3$. Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ est une droite perpendiculaire à (AB) passant par H.
Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Donc $(HM) \perp (AB)$. M décrit donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par H

6. On considère un triangle ABC tel que : $AB = 8$, $CA = 13$ et $BC = 6$. Soit H le pied de la hauteur issue de B. Calculer k tel que $\overrightarrow{CH} = k\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = kCA^2 = 169k = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(13^2 + 6^2 - 8^2\right) = -\frac{23}{2} \qquad \text{donc} \quad k = \frac{141}{336}$$

7. On considère deux points A et Bdu plan tels que $AB = 6$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $AM = 3BM$. On note G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{9}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 9\overrightarrow{BG} = 9\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) = 9\overrightarrow{BA} + 9\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{AG} = 9\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{9}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$$

   (b) Montrer que si $AM = 3BM$ alors $8GM^2 = AG^2 - 9GB^2$.

$$\begin{aligned} AM = 3BM &\Leftrightarrow ||\overrightarrow{AM}||^2 = 9||\overrightarrow{BM}||^2 \\ &\Leftrightarrow ||\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}||^2 = 9||\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}||^2 \\ &\Leftrightarrow AG^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} + GM^2 = 9BG^2 + 18\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM} + 9GM^2 \\ &\Leftrightarrow 8GM^2 = AG^2 - 9BG^2 + 2\overrightarrow{GM} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG}\right)}_{\overrightarrow{0}} = AG^2 - 9BG^2 \end{aligned}$$

   (c) Montrer donc que si $AM = 3BM$ alors $GM = \frac{3}{8}$.
   Donc $8GM^2 = AG^2 - 9BG^2 = \frac{81}{64}AB^2 - 9\frac{1}{64}AB^2 = \frac{72}{64} \Leftrightarrow GM^2 = \frac{9}{64} \Leftrightarrow GM = \frac{3}{8}$
   (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $AM = 3BM$.
   Donc l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM = 3BM$ décrit le cercle de centre G et de rayon 3/8.

Exercice 4. On considère le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $G(2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$ et $H(2, 1)$.

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG}$. En déduire la nature du triangle OGH.

$$\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux. Le triangle OGH est donc rectangle en H.

2. (a) Déterminer les longueurs :
$GO = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3+1+4\sqrt{3}+12} = \sqrt{20}$
et $HG = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$.

(b) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH}$.
Puisque le triangle OGH est rectangle en H, on a :

$$\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GH^2 = 15$$

(c) En déduire que $\cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis déterminer la valeur de l'angle $\widehat{OGH}$.
$\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GO \times GO \times \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{15}{\sqrt{20} \times \sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{15}{20}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$.
Donc : $\widehat{OGH} = \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 5. Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des ponts tels que :

$$MA = 2MB$$

1. (a) Vérifier que les points K et L, respectivement définies par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$$

appartiennent à (E).

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Rightarrow KA = 2KB \Rightarrow K \in (E)$$
$$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB} \Rightarrow LA = 2LB \Rightarrow L \in (E)$$

(b) Démontrer que : $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$$

2. Justifier que :
$$MA = 2MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = MA^2 - 4MB^2 \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^4 \Leftrightarrow MA = 2MB \qquad \text{Les grandeurs étant positives.}$$

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MK} + \underbrace{\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}}_{\overrightarrow{0}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{ML} + \underbrace{\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB}}_{\overrightarrow{0}}\right) = -3\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

3. En déduire la nature de l'ensemble (E). Avec les questions précédentes :

$$M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

Donc (E) est le cercle de rayon $[KL]$.