DS 5 : Produit scalaire et dérivation globale (lundi)

Exercice 1. .

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Exercice 2.

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 9$, $AC = 17$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{46}{306}$. Déterminer la valeur de BC.

2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \dfrac{2}{3}$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{3}$. Calculer

   (a) $(4\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 5\vec{v})$

   (b) $(-3\vec{u} + 3\vec{v})^2$.

3. On considère un triangle ABC tel que $BC = 4$, $AB = 8$ et $CA = 7$. Calculer $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

4. On considère un triangle ABC tel que : $CA = 4$, $BC = 5$ et $AB = 8$. Soit H le pied de la hauteur issue de B. Calculer k tel que $\overrightarrow{CH} = k\overrightarrow{CA}$.

5. On considère deux points A et Bdu plan tels que $AB = 6$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $AM = 3BM$. On note G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{9}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Montrer que si $AM = 3BM$ alors $8GM^2 = AG^2 - 9GB^2$.
   (c) Montrer donc que si $AM = 3BM$ alors $GM = \frac{3}{8}$.
   (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $AM = 3BM$.

Exercice 3. .

On considère la fonction f définie sur $[0,4]$ par :

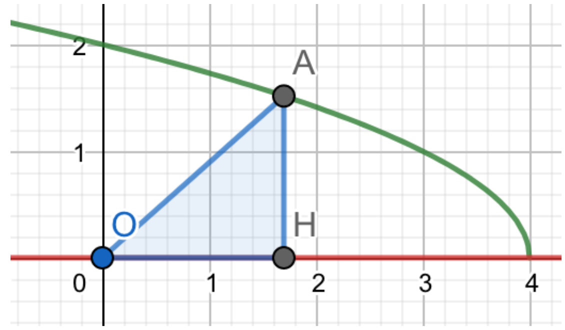
$$f(x) = \sqrt{4-x}$$

Dans le repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f graphique ci-contre où :

- Le point $A(a, f(a))$ est un point de $\mathscr{C}_f$ (où $a \in [0,4]$)
- Le point $H(a, 0)$
- On admet que le triangle OAH est rectangle en H.

On considère la fonction g définie sur $[0,4]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x} = \frac{1}{2}xf(x)$$



1. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants ci-dessous. Justifier la quatrième ligne du tableau en admettant le résultat de la troisième ligne du tableau : (c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$)
Indication : Pensez à la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

1	$f(x) :=$ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
2	$g(x) := \frac{1}{2}x *$ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
3	dériver($f(x)$) $\rightarrow \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$
4	dériver($g(x)$) $\rightarrow \dfrac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,4]$, et compléter le tableau suivant. Sur la dernière ligne vous indiquerez les variation de g (Attention, n'oubliez pas de justifier les signes) :

x	0 $\cdot$ 4
$8-3x$	
$4\sqrt{4-x}$	
$g'(x)$	
$g(x)$	

3. Montrer que $g(a)$ représente la surface du triangle OHA.
4. En déduire la valeur de a pour que la surface du triangle OHA soit maximale.

.

Exercice 4. .

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $G(2-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$ et $H(2,1)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HG}$.

   (b) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG}$. En déduire la nature du triangle OGH.

Exercice 5. Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des ponts tels que :

$$MA = 2MB$$

1. (a) Vérifier que les points K et L, respectivement définies par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$$

appartiennent à (E).

   (b) Démontrer que :

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$$

2. Justifier que :

$$MA = 2MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

3. En déduire la nature de l'ensemble (E).