DS 5 : Produit scalaire et dérivation globale (lundi)

Exercice 1. .

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Correction :

1. Déterminer graphiquement l'équation de la tangente T_4 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

$$T_0 :\ y = 4x - 1$$

2. Déterminer la fonction dérivée de g.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

Donc $g'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et $1/3$. Il est négatif entre ses racines.

3. Étudie le signe de $g'(x)$ en fonction de x et dresser le tableau de variation de g.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$	

4. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0. La formule donnant la tangente en a est $T_a :\ y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Donc :

$$T_0 :\ y = g'(0)(x-0) + f(0) = -x + 2$$

5. Cette tangente T_0 recoupe la courbe $\mathscr{C}_g$ en un point dont on déterminera les coordonnées.
Pour déterminer l'intersection entre T_0 et $\mathscr{C}_g$, nous devons résoudre :

$$f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Donc l'on trouve deux points d'intersection les points de coordonnées $(-1, 3)$ (car $g(-1) = 3$) le point de tangence $(0, 2)$.

6. (bonus) On note h la fonction affine $h(x) = -x + 2$. Étudier le signe de $f(x) - h(x)$ et en déduire la position de T_0 par rapport à $\mathscr{C}_g$.
On doit étudier le signe de l'expression :

$$f(x) - h(x) = x^2(x+1)$$

Or $x^2 \geqslant 0$ donc le signe dépend uniquement de $x + 1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$+$	
position		$T_0/\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_g/T_0$		$\mathscr{C}_g/T_0$	

Exercice 2. 1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 9$, $AC = 17$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{46}{306}$. Déterminer la valeur de BC.

On utilise Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 9^2 + 17^2 - 2 \times 9 \times 17 \times \frac{46}{306} = 324 \qquad \text{donc} \quad BC = 18$$

2. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = \frac{2}{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{3}$.

(a) $(4\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v})\cdot(2\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v})=8\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+16\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-10\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2=\dfrac{32}{9}+\dfrac{16}{3}-10=\dfrac{-10}{9}$

(b) $(-3\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})^2=9\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+9\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2-18\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=4+9-6=7.$

3. On considère un triangle ABC tel que $BC=4$, $AB=8$ et $CA=7$. Calculer $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$. On a :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=BC\times BA\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=32\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left(BC^2+BA^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(4^2+8^2-7^2\right)=\frac{31}{2}$$

Donc : $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\dfrac{31}{64}$

4. On considère un triangle ABC tel que : $CA=4$, $BC=5$ et $AB=8$. Soit H le pied de la hauteur issue de B. Calculer k tel que $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=kCA^2=16k=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(4^2+5^2-8^2\right)=-\frac{23}{2}\qquad\text{donc}\quad k=\frac{-23}{32}$$

5. On considère deux points A et Bdu plan tels que $AB=6$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $AM=3BM$. On note G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG}-9\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{0}$

(a) Montrer que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{9}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AG}-9\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=9\overrightarrow{BG}=9\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\right)=9\overrightarrow{BA}+9\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow 8\overrightarrow{AG}=9\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{9}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG}-9\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$$

(b) Montrer que si $AM=3BM$ alors $8GM^2=AG^2-9GB^2$.

$$\begin{aligned}AM=3BM&\Leftrightarrow||\overrightarrow{AM}||^2=9||\overrightarrow{BM}||^2\\&\Leftrightarrow||\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}||^2=9||\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}||^2\\&\Leftrightarrow AG^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GM}+GM^2=9BG^2+18\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM}+9GM^2\\&\Leftrightarrow 8GM^2=AG^2-9BG^2+2\overrightarrow{GM}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{AG}-9\overrightarrow{BG}\right)}_{\overrightarrow{0}}=AG^2-9BG^2\end{aligned}$$

(c) Montrer donc que si $AM=3BM$ alors $GM=\dfrac{3}{8}$.

Donc $8GM^2=AG^2-9BG^2=\dfrac{81}{64}AB^2-9\dfrac{1}{64}AB^2=\dfrac{72}{64}\Leftrightarrow GM^2=\dfrac{9}{64}\Leftrightarrow GM=\dfrac{3}{8}$

(d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $AM=3BM$.

Donc l'ensemble des points M du plan vérifiant $AM=3BM$ décrit le cercle de centre G et de rayon 3/8.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $[0,4]$ par :

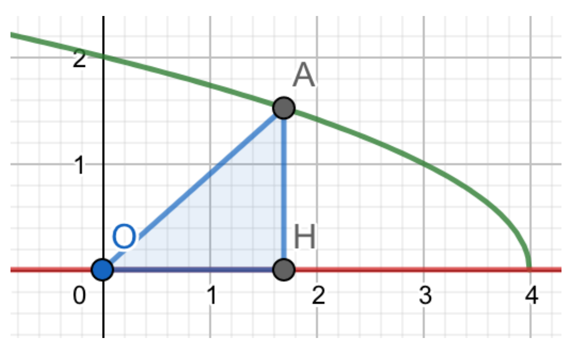
$$f(x)=\sqrt{4-x}$$

Dans le repère orthonormé $(0;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on a la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f graphique ci-contre où :

- Le point $A\,(a,f(a))$ est un point de $\mathscr{C}_f$ (où $a\in[0,4]$)
- Le point $H(a,0)$
- On admet que le triangle OAH est rectangle en H.

On considère la fonction g définie sur $[0,4]$ par :

$$g(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$$



1. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants ci-dessous. Justifier la quatrième ligne du tableau en admettant le résultat de la troisième ligne du tableau :

(c'est-à-dire $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$) .

1	$f(x) := $ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
2	$g(x) := \frac{1}{2}x *$ sqrt(4-x) $\rightarrow \frac{1}{2}x\sqrt{4-x}$
3	dériver$(f(x))$ $\rightarrow \dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}$
4	dériver$(g(x))$ $\rightarrow \dfrac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 \times \sqrt{4-x} - x \times \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\right) = \frac{2(4-x)-x}{4\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{4\sqrt{4-x}}$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0,4]$, en recopiant et complétant le tableau suivant. Sur la dernière ligne vous indiquerez les variation de g :

$$8-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \geqslant x \qquad et \qquad 4\sqrt{4-x} \geqslant 0$$

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$8-3x$		$+$	0	$-$	
$2\sqrt{4-x}$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

On a : $g\left(\dfrac{8}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3. Montrer que $g(a)$ représente la surface du triangle OHA.

$$\text{surface du triangle OHA} = \frac{1}{2}OH \times AH = \frac{1}{2}a \times f(a) = g(a)$$

4. En déduire la valeur de a pour que la surface du triangle OHA soit maximale.
   D'après la question 2. La valeur maximale de $g(a)$ est $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ et est atteinte en $a = \dfrac{8}{3}$.

Exercice 4. On considère le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $G(2-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$ et $H(2,1)$.

1. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG}$. En déduire la nature du triangle OGH.

$$\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

   Donc $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux. Le triangle OGH est donc rectangle en H.

2. (a) Déterminer les longueurs :
   $GO = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1 + 4\sqrt{3} + 12} = \sqrt{20}$
   et $HG = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$.

   (b) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH}$.
   Puisque le triangle OGH est rectangle en H, on a :

$$\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GH^2 = 15$$

   (c) En déduire que $\cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ puis déterminer la valeur de l'angle $\widehat{OGH}$.

   $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = GO \times GO \times \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH}) = \dfrac{15}{\sqrt{20} \times \sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{15}{20}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$.

   Donc : $\widehat{OGH} = \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 5. Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des ponts tels que :

$$MA = 2MB$$

1. (a) Vérifier que les points K et L, respectivement définies par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$$

appartiennent à (E).

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Rightarrow KA = 2KB \Rightarrow K \in (E)$$

$$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB} \Rightarrow LA = 2LB \Rightarrow L \in (E)$$

(b) Démontrer que : $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2\overrightarrow{LB} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$$

2. Justifier que :

$$MA = 2MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = MA^2 - 4MB^2 \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^4 \Leftrightarrow MA = 2MB \qquad \text{Les grandeurs étant positives.}$$

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MK} + \underbrace{\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}}_{\overrightarrow{0}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{ML} + \underbrace{\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB}}_{\overrightarrow{0}}\right) = -3\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

3. En déduire la nature de l'ensemble (E). Avec les questions précédentes :

$$M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

Donc (E) est le cercle de rayon $[KL]$.