DS 5 : Produit scalaire et dérivation globale (lundi)

Exercice 1. .

Partie A

On considère la fonction f définie que $[0,15]$ par :

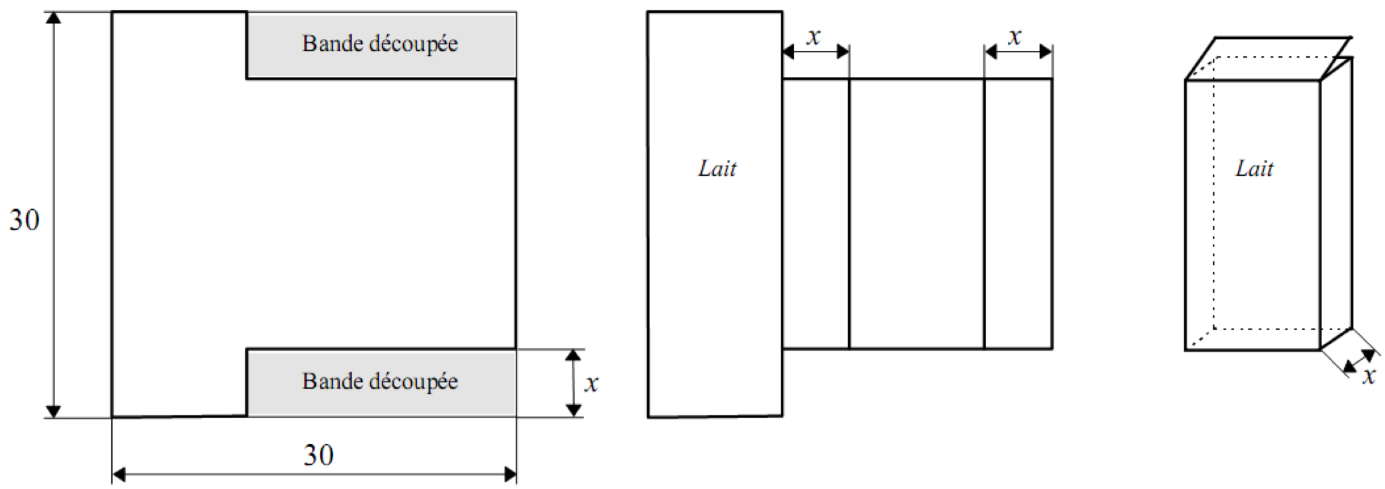
$$\forall x \in [0,15],\ f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,15]$.

Partie B

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton. Au départ, il dispose d'une feuille carrée en carton dans laquelle on a retiré deux bandes de même largeur.



Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées.

1. Explique pourquoi les valeurs de x varient sur l'intervalle $[0,15]$.
2. Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
3. En remarquant que $V = f$ utiliser la partie A pour déterminer la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ est maximal. Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.
4. (a) En utilisant le tableau de variation de la partie A, déterminer combien de valeurs de x permettent d'obtenir un volume de boite de $0,5$ c'est à dire $500\ cm^3$. Trouver un encadrement de ces solutions.
   (b) Montrer que
   $$V(x) - 500 = (x-10)(2x^2 - 40x + 50)$$
   (c) Résoudre $2x^2 - 40x + 50 = 0$.
   (d) Déduire des questions précédentes les valeurs de x pour lesquelles le volume de la boites est égale à un demi litre.

.

Exercice 2. .

On considère la fonction g définie sur $[-1;2]$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Exercice 3. 1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 14$, $AC = 18$ et $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{196}{504}$. Déterminer la valeur de BC.

2. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = \dfrac{5}{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \dfrac{3}{2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -10$. Calculer

   (a) $(3\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

   (b) $(5\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2$.

3. On considère un triangle ABC tel que $BA = 2$, $CB = 4$ et $AC = 3$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

4. On considère un triangle ABC tel que $BC = 11$, $AB = 8$ et $CA = 5$. Calculer $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

5. On considère les points A et B du plan tels que $AB = 3$. Soit H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$ est une droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

6. On considère un triangle ABC tel que : $AB = 8$, $CA = 13$ et $BC = 6$. Soit H le pied de la hauteur issue de B. Calculer k tel que $\overrightarrow{CH} = k\overrightarrow{CA}$.

7. On considère deux points A et Bdu plan tels que $AB = 6$. On veut déterminer l'ensemble des points M tels que $AM = 3BM$.
On note G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG} - 9\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$

   (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{9}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$.

   (b) Montrer que si $AM = 3BM$ alors $8GM^2 = AG^2 - 9GB^2$.

   (c) Montrer donc que si $AM = 3BM$ alors $GM = \dfrac{3}{8}$.

   (d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $AM = 3BM$.

Exercice 4. .

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les points $G(2-\sqrt{3}; 1+2\sqrt{3})$ et $H(2,1)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{HG}$.
   (b) Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HG}$. En déduire la nature du triangle OGH.
2. (a) Montrer que $GO = \sqrt{20}$ et $GH = \sqrt{15}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GH} = 15$.
   (c) En déduire que $\cos(\overrightarrow{GO}; \overrightarrow{GH})$ puis déterminer la valeur de l'angle $\widehat{OGH}$.

Exercice 5. Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer l'ensemble (E) des ponts tels que :

$$MA = 2MB$$

1. (a) Vérifier que les points K et L, respectivement définies par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}$$

   appartiennent à (E).

   (b) Démontrer que :

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$$

2. Justifier que :

$$MA = 2MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$$

3. En déduire la nature de l'ensemble (E).