DS 5 du 27 janvier.

Exercice 1

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

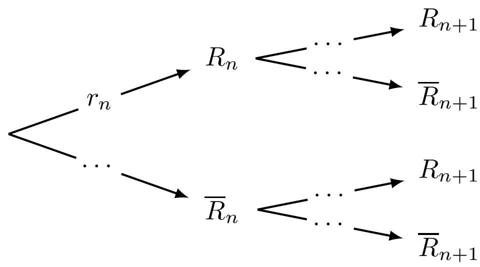
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,8$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,9$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,3$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.
   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   (c) Déterminer la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine.
   (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre (aucune justification n'est attendue) :
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$$
   (c) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$.
   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$.
   (e) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



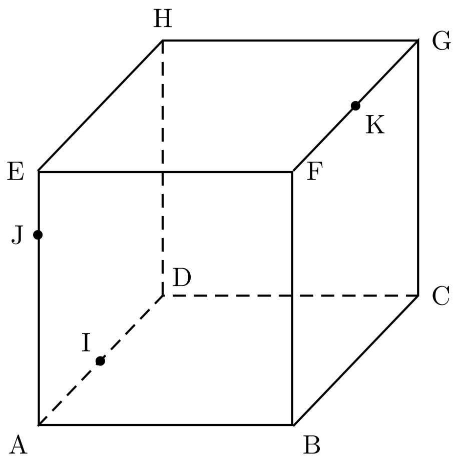
Exercice 2

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).



Exercice 3

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

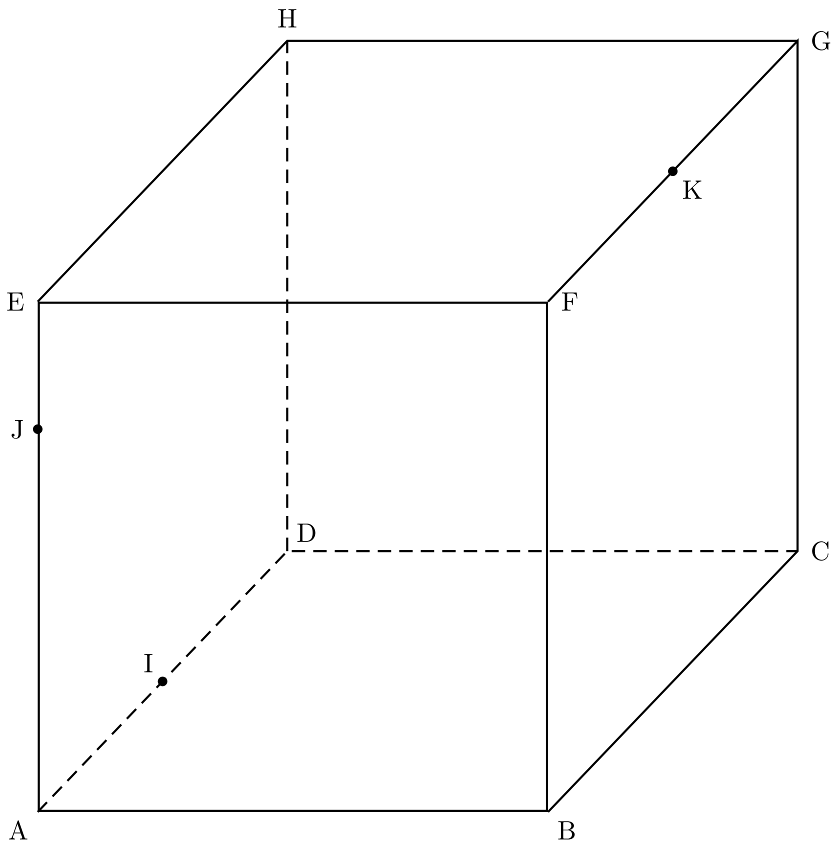
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

   (d) Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

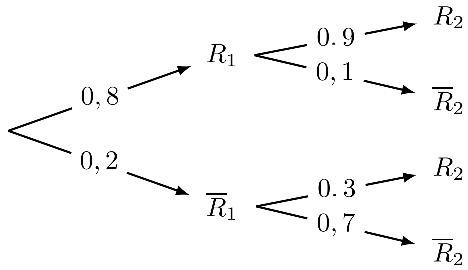
   Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

4. Annexe (à rendre avec la copie)



Réponse de l'exercice 1

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2. 2 points



(b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine. 2 points

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$$

(c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,78$. 2 points

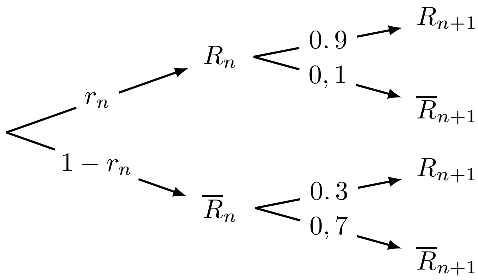
$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = 0,72 + P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,72 + 0,2 \times 0,3 = 0,78$$

(d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? 3 points
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

$$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{P(R_2)} = \frac{0,2 \times 0,3}{0,78} = \frac{0,06}{0,78} \simeq 0,077 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

(a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) : 2 points



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$. 3 points

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= P\left(R_n\right) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n}\right) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0,9 + (1 - r_n) \times 0,3 = 0,6r_n + 0,3 \end{aligned}$$

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, P_n : " $r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$ ".
Initialisation : $0,05 \times 0,6^{1-1} + 0,75 = 0,8$. Or la probabilité pour que le client ramène la bouteille à l'issue de la première semaine est bien $r_1 = 0,8$. 1 point
Hérédité : 3 points Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'expression de r_n soit $0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$. Alors :

$$r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3 = 0,6\left(0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75\right) + 0,3 = 0,05 \times 0,6^n + 0,6 \times 0,75 + 0,3 = 0,05 \times 0,6^n + 0,75$$

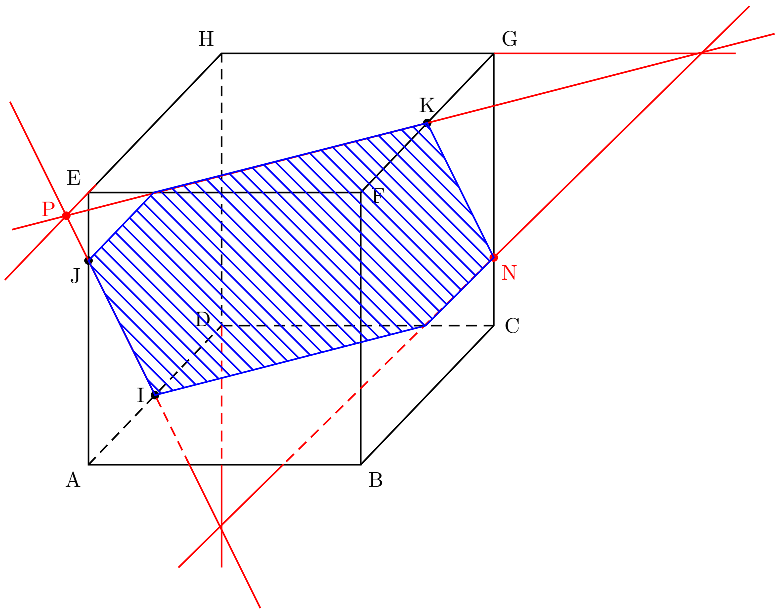
On a donc montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$$

(d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
On a $|0,6| < 1$ 1 point donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0,75$ 1 point . On en déduit qu'avec le temps, la proportion de client rendant la bouteille se stabilise à 0,75. 1 point

Réponse de l'exercice 2 .

1. Construction du point P, intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) : voir figure.
2.
   - 1 point Le point P est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) ; le point H appartient au plan (EFG) donc la droite (EH) est contenue dans le plan (EFG).
     On en déduit que P ∈ (IJK) ∩ (EFG).
   - Le point K appartient au plan (IJK) et à la droite (FG) qui est contenue dans le plan (EFG). 2 points
     On en déduit que K ∈ (IJK) ∩ (EFG).
   - Les plans (IJK) et (EFG) ne sont pas parallèles donc leur intersection est une droite. Les deux points P et K appartiennent à l'intersection des deux plans donc l'intersection des deux plans (IJK) et (EFG) est la droite (PK).



Réponse de l'exercice 3 Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. 1 point D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   Remarque : La courbe représentative admet la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.
   On a : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Par produit sur les limites $\lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$. 2 points
   Remarque : La courbe représentative admet la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) comme asymptote verticale en 0.
2. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \quad \text{2 points}$$

3. Or $x^2 > 0$ 1 point sur $]0\ ;\ +\infty[$. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$:

$$1 - \ln x > 0 \leftrightarrow 1 > \ln x \leftrightarrow \mathrm{e} > x \qquad \text{1 point}$$

1 point

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

Réponse de l'exercice 4 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. 4 points
   - *Initialisation* : $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}^2$.
   L'encadrement est vrai au rang 0.
   - *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$, on a donc par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$, $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e}$ ou encore $1 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e}$, puis par produit par e :
   $\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} \leqslant \mathrm{e} \times \mathrm{e}$ et *a fortiori* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^2$. L'encadrement est héréditaire.
   On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de la récurrence on a montré que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$.
2. (a) 3 points Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}\right)$.
   Or on a d'une part $\sqrt{u_n} \geqslant 0$, et on a vu dans la question précédente que $\sqrt{u_n} < \mathrm{e} \iff \mathrm{e} - \sqrt{u_n} > 0$ donc finalement $\sqrt{u_n}\left(\mathrm{e} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \iff u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

   (b) 2 points La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \mathrm{e}^2$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(\mathrm{e} \times \sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln \mathrm{e} + \ln\sqrt{u_n} - 2 = 1 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln u_n = \dfrac{1}{2}\ln u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(\ln u_n - 2) = \dfrac{1}{2}v_n$. 3 points
   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$. 1 point

   (b) 2 points On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   (c) Or $v_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff u_n = \mathrm{e}^{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. 2 points

   (d) Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ 1 point , on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 2$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^2$. 1 point

   justifiant.

   Affirmation 1 1 point : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   On a $u_1 = \mathrm{e} \times \sqrt{2\,018} \approx 122$;
   $u_2 = \mathrm{e} \times \sqrt{u_1} \approx 30$;
   $u_3 = \mathrm{e} \times \sqrt{u_2} \approx 15$ L'affirmation n'est pas vraie.
   Affirmation 2 2 points : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   L'affirmation est vraie car l'initialisation de la récurrence est encore valable : $1 \leqslant u_0 \leqslant \mathrm{e}^2$, donc l'encadrement est encore vrai.
   Affirmation 3 2 points : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »
   La suite (u_n) est constante si et seulement si quel que soit n, $u_{n+1} = u_n \iff \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} = u_n \iff \mathrm{e} \times \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} \iff \mathrm{e} = \sqrt{u_n} \iff u_n = \mathrm{e}^2$.
   L'affirmation est fausse.