DS 6 du 17 février.

Exercice 1

(3 points) L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,587 7.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Exercice 2

(7 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Vous compléterez le graphique proposé en Annexe et à rendre avec votre copie.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.
   - **a.** Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   - **b.** Placer les points A et B sur le graphique proposé en annexe.
   - **c.** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
3. On note F le point d'affixe $z_{\mathrm{F}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}$.
   - **a.** Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   - **b.** En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.
   - **c.** Calculer le module de z_{F} et en déduire l'écriture de z_{F} sous forme trigonométrique.
   - **d.** En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Exercice 3

(10 points)

Dans cet exercice les parties A et B sont totalement indépendantes.

Question préliminaire :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On a donné en ANNEXE, qui est à rendre, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

Partie A

Dans cette partie, n désigne un entier naturel strictement positif. On note E_n l'équation.

$$(E_n) : \qquad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[\mathrm{e}\,; \infty]$ notée α_n.
L'objectif de la fin de cette partie est l'étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

2. Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Placer sur l'axe des abscisses les valeurs de α_3, α_4 et α_5, en faisant apparaître les trais de construction.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

3. Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (α_n).

4. Pour $n \geq n$ entier, justifier que $\ln \alpha_n = \frac{\alpha_n}{n}$ et établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\alpha_n \geqslant n\frac{\alpha_3}{3}.$$

5. En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \alpha_n$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ par

$$g(x) = f(x) + 1$$

Soit (u_n) la suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{e} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs (vous pourrez donner des valeurs approchées à 10^{-2} près) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	e					

2. Dresser le tableau de variation de g sur $[1, \mathrm{e}]$.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \mathrm{e}$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.

5. Soit h la fonction définie sur $[1, \mathrm{e}]$ par :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}],\ h(x) = x - g(x)$$

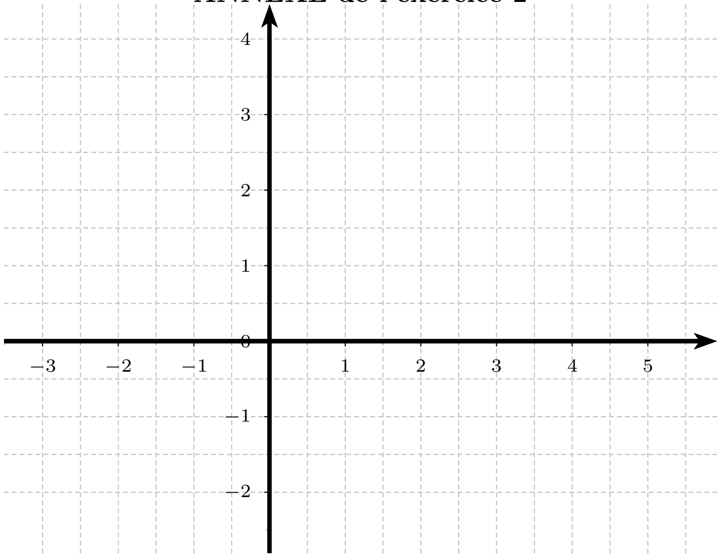
a. Montrer que $h'(x)$ est du signe de $t(x) = x^2 + \ln x - 1$ et justifier que $t(x) > 0$ sur $[1, \mathrm{e}]$.

b. En déduire le tableau de variation de h sur $]1, \mathrm{e}]$.

c. Déterminer la ou les solutions de l'équation $g(x) = x$ sur $[1, \mathrm{e}]$.

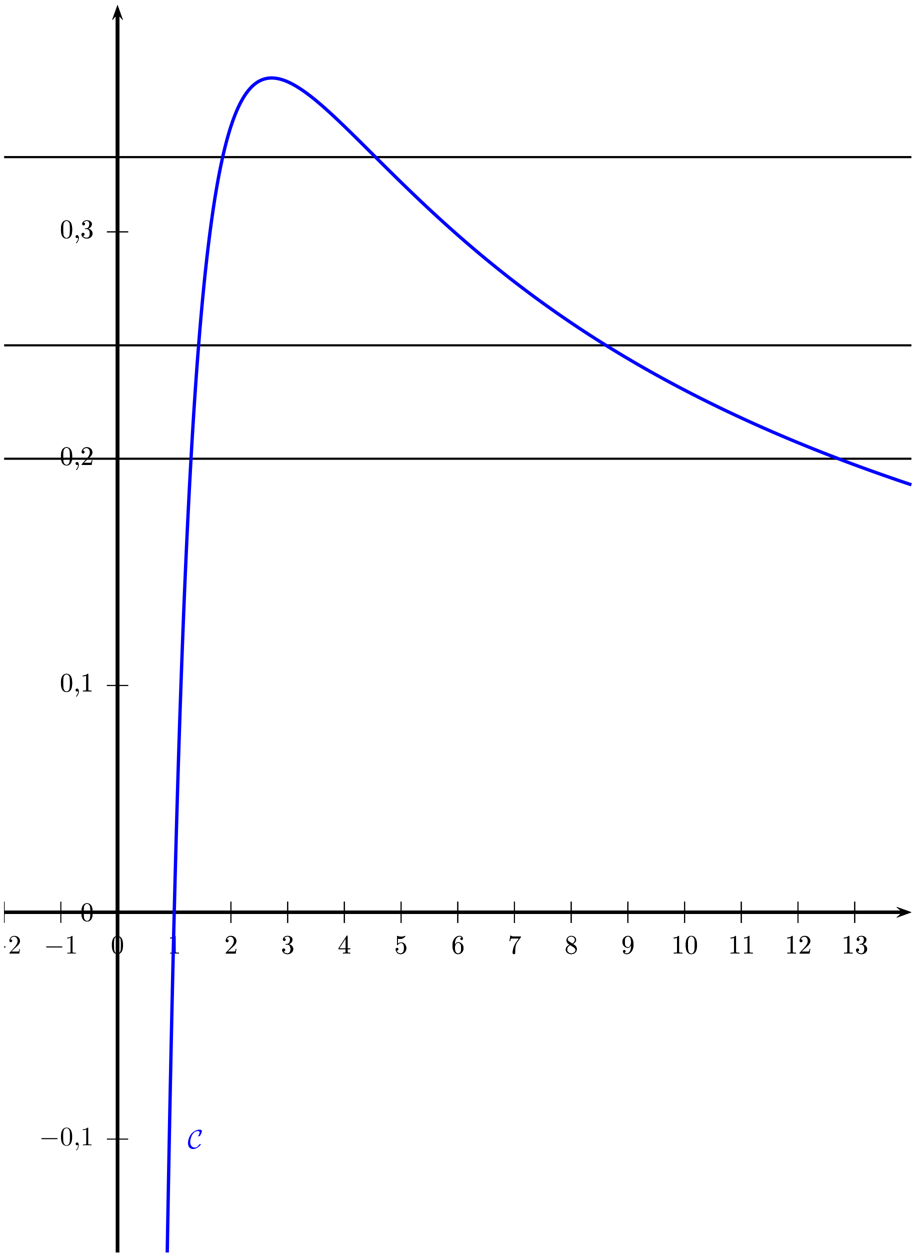
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).

ANNEXE de l'exercice 2



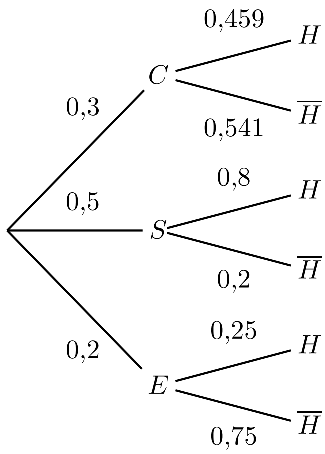
ANNEXE de l'exercice 3

Cette annexe est à rendre.



Réponse de l'exercice 1

1. Arbre pondéré complet : (3 points)



2. On a, d'après l'arbre pondéré : $P(C \cap H) = 0{,}3 \times 0{,}459 = 0{,}137\,7$. (2 points)

3. Les événements C, S et E formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{array}{rcl} P(H) & = & P(C\cap H) + P(S\cap H) + P(E\cap H) \\ & = & 0{,}137\,7 + 0{,}5\times 0{,}8 + 0{,}2\times 0{,}25 \\ & = & 0{,}587\,7 \qquad (2 points) \end{array}$$

4. Il s'agit ici de calculer $P_H(S)$. Par définition :

$$\begin{array}{rcl} p_H(S) & = & \dfrac{P(S\cap H)}{P(H)} \\ & = & \dfrac{0{,}5\times 0{,}8}{0{,}587\,7} \\ & \approx & 0{,}681 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}(3 points). \end{array}$$

Réponse de l'exercice 2

1. $\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{lcl} z^2-2z+4 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2+4 & = & 0 \end{array}\right.$.

- $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2=-3 \iff (z-1)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- $z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$: cette équation a deux solutions : $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions (4 points) :

$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $\quad 2\mathrm{i}$; $\quad -2\mathrm{i}$.

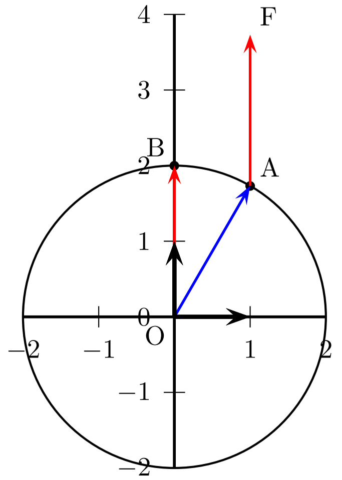
2. **a.** • $|z_{\mathrm{A}}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_{\mathrm{A}}| = 2$.

On peut écrire $z_{\mathrm{A}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. (1 point)

• $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. (1 point)

On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2. (1 point)

b. Faire une figure et placer les points A et B. (2 point)



c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

On a $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Or $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\pi}{6}$. (2 points)

3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.

a. Placer le point F sur la figure précédente(1 point). Montrer que OAFB est un losange. (2 point)

F se construit par la méthode du parallélogramme ; or on a vu que OA = OB : le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right)$ puis de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OF}\right)$. (2 points)

OAFB est un parallélogramme et OA = OB = 1, donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$; donc une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right)$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OF}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$ qui est un argument de z_F.

c. Calculer le module de z_F et en déduire l'écriture de z_F sous forme trigonométrique. (2 point)

On a $z_F = z_A + z_B = 1 + i\sqrt{3} + 2i = 1 + i\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Donc $|z_F|^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)^2 = 1+3+4+4\sqrt{3} = 8+4\sqrt{3} = 4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Donc $|z_F| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

On a vu qu'un argument de z_F est $\dfrac{5\pi}{12}$, donc l'écriture trigonométrique de z_F est :

$z_F = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

d. En déduire la valeur exacte de : (2 point)

On a vu que la partie réelle de z_F est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$1 = 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times(4-3)} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Ces deux nombres sont positifs $\left(\sqrt{6} > \sqrt{2}\right)$; comparons leurs carrés :

- $\left[\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$;
- $\left[\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \dfrac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux ; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Réponse de l'exercice 3

Question préliminaire

Pour tout réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ (2 point). Comme $x^2 > 0$ (1 point), $f'(x)$ a donc le même signe que $1 - \ln(x)$. Or :

$$1 - \ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \geqslant \ln(x) \Longleftrightarrow \mathrm{e} \geqslant x \qquad (1 point)$$

Par ailleurs on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ (1 point) (pas de forme indéterminée), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (1 point) (par croissance comparée) et $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (1 point)

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et ce maximum est atteint en $x = \mathrm{e}$.

Partie A

1. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$, alors $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. (1 point)

   Sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la fonction f est continue (car dérivable), et strictement décroissante. (1 point) Elle réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x); f(1)\right] = \left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

   Le nombre $\dfrac{1}{n}$ appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.
2. Les abscisses supérieurs à e des points d'intersection entre les droite D_3, D_4, D_5 et la courbe $\mathcal{C}$ sont les nombre α_3, α_4 et α_5. Graphiquement, on lit que $\alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5$, il semble donc que la suite (α_n) soit croissante. (2 points)
3. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de la suite (α_n), on a $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$. (1 point)

   Comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, on a donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$. (1 point)

   La fonction f étant décroissante de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur $= \left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ or $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$ donc les antécédents sont "rangés dans l'ordre inverse" $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (α_n) est croissante. (2 point)
4. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Par définition de α_n, on a :

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{\ln(\beta_n)}{\alpha_n} = \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \ln(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n}. \qquad (1 point)$$

   La suite (α_n) est croissante, donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ on a $\alpha_n \geqslant \beta_3 > 0$. La fonction ln étant croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, ceci implique que $\ln(\alpha_n) \geqslant \ln(\alpha_3)$ (2 point), c'est-à-dire que $\dfrac{\alpha_n}{n} \geqslant \dfrac{\alpha_3}{3}$ (1 point). On en déduit bien que $\alpha_n \geqslant n\dfrac{\alpha_3}{3}$. (1 point)
5. $\alpha_3 > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n\dfrac{\alpha_3}{3} = +\infty$. Par comparaison à l'infini, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$. (2 points)

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ par

$$g(x) = f(x) + 1$$

Soit (u_n) la suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{e} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs (vous pourrez donner des valeurs approchées à 10^{-2} près) : (2 points)

n	0	1	2	3	4	5
u_n	e	1,37	1,23	1,17	1,13	1,11

2. Dresser le tableau de variation de g sur $[1, \mathrm{e}]$. On a $g' = f$ donc : (2 point)

x	1		e
$g'(x)$		$+$	0
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$

3. Montrons par récurrence que (3 point) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \mathrm{e}$$

Initiale : Avec le tableau de valeur on a :

$$1 \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \mathrm{e}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \mathrm{e}$.
Comme la fonction f est croissante sur $[1, \mathrm{e}]$, on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \mathrm{e} \Rightarrow f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(\mathrm{e}) = 1 + \frac{1}{e} \leq \mathrm{e} \Rightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e}$$

Conclusion : On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \mathrm{e}$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc (u_n) est convergente. (2 points)

5. Soit h la fonction définie sur $[1, \mathrm{e}]$ par :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}],\ h(x) = x - g(x)$$

a. Montrer que $h'(x)$ est du signe de $t(x) = x^2 + \ln x - 1$ et justifier que $t(x) > 0$ sur $[1, \mathrm{e}]$. soit $[1, \mathrm{e}]$:

$$h'(x) = 1 - g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} = \frac{t(x)}{x^2} \qquad (2 points)$$

Comme $x > 1$, alors $x^2 > 1$ et $\ln x > 0$ donc $t(x) > 0$. Comme $x^2 > 0$, $h(x)$ est du signe de $t(x) > 0$. (1 point)

b. En déduire le tableau de variation de h sur $[1, \mathrm{e}]$. (1 point)

x	1		e
$h'(x)$		$+$	0
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e} + 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$

c. Déterminer la ou les solutions de l'équation $g(x) = x$ sur $[1, \mathrm{e}]$.
D'après le tableau de variation précédent $g(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (1 point)

6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Si on note l la limite de la suite (u_n), on a $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_{n+1} = l = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} f(u_n) = g(l)$ car g est une fonction continue. Donc $l = 1$. (2 points)