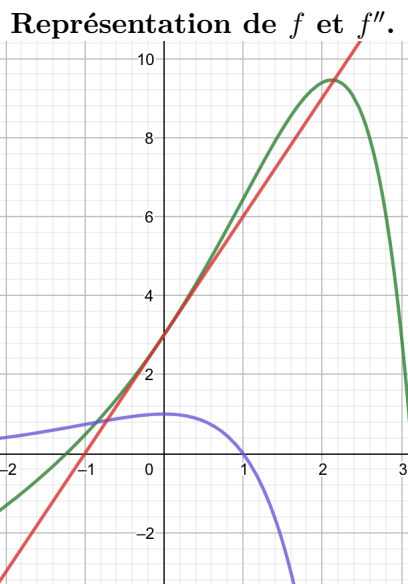


# DS 4 : Probabilité et fonction exponentielle.

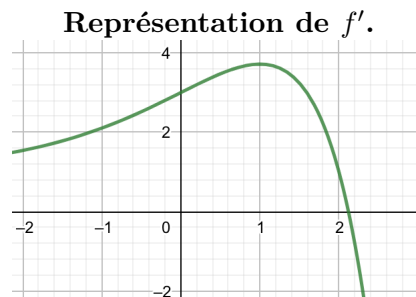
Consignes :

- Durée 1h45.
- Calculatrice autorisée.
- Justifiez vos réponses.

**Exercice 1.** La courbe  $(C_1)$  ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur  $[-2 ; 3]$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$ .



- On note  $D$  le point de  $(C_1)$  d'abscisse 1.



- Le point  $A(0; 3)$  est un point de  $(C_1)$ .
- On a représenté en  $A$  la tangente à la courbe  $(C_1)$ . Son équation est  $y = 3x + 2$ .
- La courbe  $(C_3)$  ci-dessus représente, dans le repère orthonormé, la fonction  $f''$ .
- Le point  $B(1; 0)$  est le point d'intersection de  $(C_3)$  avec l'axe des abscisses.

- La courbe  $(C_2)$  ci-dessus représente, dans le repère orthonormé, la fonction  $f'$ .
- Le point  $E$  est le point d'intersection de  $(C_2)$  avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse  $\alpha$  de  $E$  est  $\alpha \simeq 2,12$ .

1. Par lecture graphique,
  - (a) Donner la valeur de  $f(0)$ .
  - (b) Donner la valeur de  $f'(0)$ .
  - (c) Étudier la convexité de  $f$  sur  $[-2 ; 3]$  et les points d'inflexion de la courbe  $(C_1)$ . Justifier la réponse.
2. On admet désormais que la fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  dans  $[-2 ; 3]$  par :

$$f(x) = (3 - x)e^x + x.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) := (3 - x) * \exp(x) + x$ $\rightarrow (3 - x)e^x + x$
2	dériver( $f(x)$ ) $\rightarrow (2 - x)e^x + 1$
3	factoriser( dériver( $f'(x)$ )) $\rightarrow (1 - x)e^x$

- (a) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de  $f'(x)$ .
- (b) Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de  $f''(x)$ .
- (c) Étudier le signe de  $f''(x)$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$  sur  $[-2 ; 3]$ .
- (d) Justifier que l'équation  $f'(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans  $[-2 ; 3]$ . On notera  $\alpha$  cette solution.
3. (a) Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessous. On pourra compléter le tableau de variation en utilisant des valeurs approchées à  $10^{-2}$  pour les valeurs de  $f$  :

$x$	-2	$\alpha$	3
$f'(x)$			
$f(x)$			

- (b) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  possède une unique solution  $\beta$  dans  $[-1 ; 2]$ .
- (c) Déterminer un encadrement de  $\beta$  d'amplitude 0,01.
4. Montrer que l'équation de la tangente à  $(C_1)$  au point  $D$  d'abscisse 1 est :

$$y = (e + 1)x + e$$

5. On note  $F$  la fonction définie sur  $[-1 ; 2]$  par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (-x + 4)e^x$$

- (a) Vérifiez que :

$$F'(x) = f(x)$$

- (b) Déterminer une valeur approchée de  $(F(2) - F(1))$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 2.** En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.

Trois types de visites sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans audioguide.

Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

- 55 % des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51 % des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37 % à des visites avec location d'audioguide ;
- 70 % des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

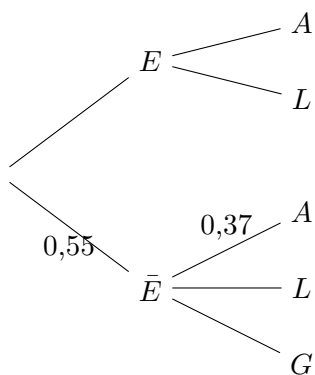
On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.

On considère les évènements suivants :

- $E$  : « le billet a été acheté en ligne » ;
- $A$  : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide » ;
- $L$  : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide » ;
- $G$  : « le billet correspond à une visite de groupe ».

On rappelle que si  $E$  et  $F$  sont deux évènements,  $p(E)$  désigne la probabilité de l'évènement  $E$  et  $p_F(E)$  désigne la probabilité de l'évènement  $E$  sachant que l'évènement  $F$  est réalisé. On note  $\bar{E}$  l'évènement contraire de  $E$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :

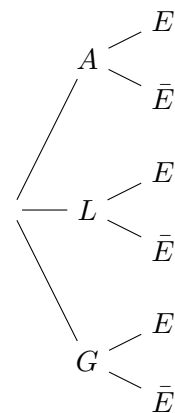


2. Montrer que la probabilité que le billet ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à 0,135.
3. Montrer que  $p(A) = 0,3385$ .
4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. Quelle est la

probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée ? On arrondira le résultat au millième.

5. (Question bonus)

Déterminer les probabilités qui permettent de compléter l'arbre ci-dessous et le compléter. On autorisera l'emploi de valeurs approchées à 0,001 pour les pondérations.



**Exercice 3.** Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.

Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au mois de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :

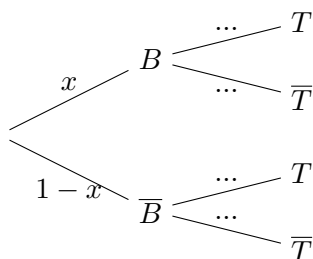
- sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas ;
- sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.

Pour un poisson prélevé au hasard, on note :

- $B$  l'évènement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
- $T$  l'évènement : « le test du poisson est positif » ;
- $\bar{B}$  et  $\bar{T}$  les évènements contraires de  $B$  et  $T$ .

On note  $x$  la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2. (a) Démontrer que  $p(T) = 0,5x + 0,1$ .  
 (b) Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement ont eu un test positif. En déduire la valeur de  $x$ .  
 (c) Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?
3. (a) On a prélevé un poisson dont le test est positif. Déterminer la probabilité pour que le poisson soit effectivement infecté par la bactérie.  
 (b) On a prélevé un poisson dont le test est négatif. Déterminer la probabilité pour que le poisson soit infecté par la bactérie. (On pourra arrondir à  $10^{-3}$  près.)
4. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :

