DS 6 : Géométrie repérée et primitives et équations différentielles.

Exercice 1. **a.** Déterminer les solutions de l'équation différentiel : $E_0 :\ 2y' + y = 0$

b. Déterminer une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré de l'équation différentiel :

$$E :\ 2y' + y = (x+2)^2$$

c. Déduire des deux questions précédentes la forme des solutions de l'équation $E :\ 2y' + y = (x+2)^2$.

d. Déterminer la solution de E telle que $y(0) = 3$.

Exercice 2. .

a. Montrer que A définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \dfrac{-1}{2}\ln(\cos^2(x)+1)$ est une primitive de a définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)+1}$

b. Montrer que la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}$ (où $C \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation différentielle

$$Q_0 : (1+\cos^2(x))y' + \sin(x)\cos(x)y = 0$$

c. Déterminer une fonction constante solution de

$$Q : (1+\cos^2(x))y' + \sin(x)\cos(x)y = \frac{3}{2}\sin(2x)$$

(On rappel que $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.)

d. Trouver les solutions de l'équation différentielle :

$$Q : (1+\cos^2(x))y' + \sin(x)\cos(x)y = \frac{3}{2}\sin(2x)$$

e. Simplifier l'expression $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K\mathrm{e}^{-A(x)}$ et trouver une solution de Q vérifiant $y(0) = 3$.

Exercice 3. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(6, 1, -2)$ un point de l'espace et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne

$$\mathscr{P} : 3x + 2y - z + 6 = 0$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par A et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer le projeter orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. En déduire la distance de A à $\mathscr{P}$.

Exercice 4. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites :

- (d) passant par $A(-1, -1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$
- (d') passant par $B(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est une vecteur dont la direction est orthogonale aux directions respectives de (d) et (d').
2. Trouver une représentation paramétrique de la droite Δ de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par $C\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-23}{5}, 0\right)$.
3. **(Bonus)** Δ est-elle sécante avec (d) ? (d') ?