Correction du DS de 1S du 12 avril 2019

Exercice 1. .
Un propriétaire décide de louer son hangar à l'année. Il propose pour l'année 2020 un loyer annuel de 4000 €, puis d'augmenter ce loyer chaque année de 2%.

On modélisée cette situation par la suite (v_n) où v_n représente le loyer à l'année $2020 + n$.

1. Étude de le suite (v_n).
   (a) Déterminer les loyers aux années 2021 et 2022. (C'est-à-dire v_1 et v_2)
   $v_1 = v_0 \times (1 + 0,02) = 4080$ € et $v_2 = v_1 \times 1,02 = 4161,60$ €.
   (b) Déterminer l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n).
   $$v_{n+1} = \underbrace{v_n}_{\text{Loyer à l'année n.}} \times \underbrace{(1+0,02)}_{\text{augmneté de 0,02 \%}}$$
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,02$ et de premier terme $v_0 = 4000$.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   On peut donc exprimer v_n en fonction de n : $v_n = v_0 \times 1,02^n = 4000 \times 1,02^n$
   (d) Déterminer le loyer que devrait percevoir le propriétaire à l'année 2034 (vous arrondirez le résultat à l'euro près)
   Le loyer perçu par le propriétaire en 2034 sera donc de :
   $$v_{14} = 4000 \times 1,02^{14} \simeq 5278 \text{ €}$$
2. On note $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.
   (a) Déterminer ce que représentera pour le propriétaire la somme totale des loyers perçus par le propriétaire à la fin de l'année 2034.
   $$\begin{aligned} S_{14} = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{14} &= 4000 + 4000 \times 1,02^1 + 4000 \times 1,02^2 + ... + 4000 \times 1,02^{14} \\ &= 4000 \times \left(1 + 1,02 + 1,02^2 + ... + 1,02^{14}\right) = 4000 \frac{1,02^{15}-1}{1,02-1} \\ &= 200000\left(1,02^{15}-1\right) \\ &\simeq 69174 \text{ €} \end{aligned}$$
   (b) Exprimer S_n en fonction de n.
   $$\begin{aligned} S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n &= 4000 + 4000 \times 1,02^1 + 4000 \times 1,02^2 + ... + 4000 \times 1,02^n \\ &= 4000 \times \left(1 + 1,02 + 1,02^2 + ... + 1,02^n\right) = 4000 \frac{1,02^{n+1}-1}{1,02-1} \\ &= 200000\left(1,02^{n+1}-1\right) \end{aligned}$$
   (c) On veut déterminer au bout de combien d'année la totalité des loyers perçus dépassera 100 000 €. Montrer que cela revient à déterminer les valeurs de n pour que : $1,02^{n+1} \geqslant 1,5$.
   $$S_n \geqslant 100000 \Leftrightarrow 200000\left(1,02^{n+1}-1\right) \geqslant 100000 \Leftrightarrow \left(1,02^{n+1}-1\right) \geqslant 0,5 \Leftrightarrow 1,02^{n+1} \geqslant 1,5$$
   (d) Nous avons fait tourner le petit programme Python suivant :

```
N=0
while 1.02**N<1.5:    %On rappel que ** signifie puissance.
    N=N+1
print(N)
```

La valeur affichée dans le Shell est 21. Commenter ce résultat.
ce programme permet de calculer les puissance successive de 1,02 jusqu'à ce que $1,02^N$ soit plus grand que 1,5. Avec la question précédente, on peut en déduire que l'indice permettant d'obtenir $S_n \geqslant 100000$ vérifie $n+1=21$ donc $n=20$ et donc l'année où la totalité des sommes perçu par le propriétaire dépassera 100 000 € sera l'année 2040.

Exercice 2. Une pizzéria assure à ses clients une livraison en moins de 30 min. On a pu vérifié que 97 % des clients étaient livrés en moins de 30 min. Ce qui l'on interprétera par : "la probabilité qu'un client soit livré en moins de 30 min est 0,97".

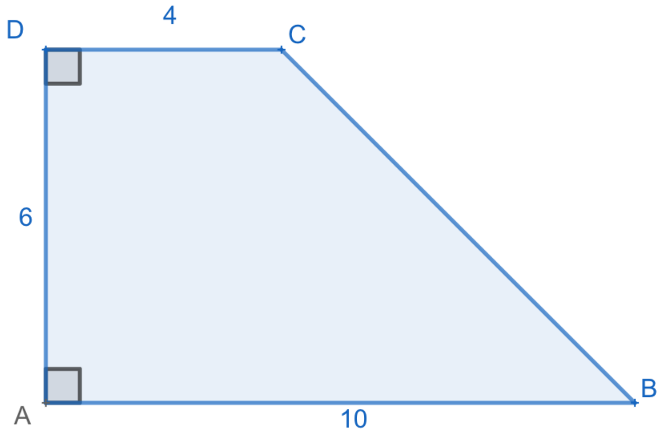
Le mardi soir la pizzéria livre 100 clients. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de client **n'ayant pas** été livrés en moins de 30 min ce mardi soir.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
   On a :
   - répétition 100 fois de la même expérience (pour chacun des 100 clients)
   - Avec deux issues possibles : soit le client est livré en plus de 30 min (sucés), soit en moins de 30 min (échecs)
   - De façon indépendante : on considère que ce n'est pas parce qu'un client n'est pas livré à temps que le suivant ne le sera pas.

   Donc la variable X (le nombre de client livré en plus de 30 min) suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,03 (probabilité d'un sucés : c'est-à-dire "être livré en plus de 30 min")
2. Montrer que la probabilité pour qu'aucun client n'ai été pas livré avec plus de 30 min est $0,97^{100}$.
   $$P(X=0)=(1-p)^n=0,97^{100}$$
3. A la calculatrice, déterminer la probabilité qu'il y ait moins de 3 clients n'ayant pas été livrés en moins de 30 min.
   En utilisant la fonction BinomialCD(3,100,0,03), on obtient $P(X \leqslant 3) \simeq 0,647$ à 10^{-3} près.
4. Parmi les expressions suivantes déterminer la valeur exacte de $P(X=1)$ (justifier) : La formule donner la loi de X est $P(X=k)=\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$, donc :
   $$P(X=1)=\underbrace{\binom{100}{1}}_{\text{vaut } 100} \times 0,03^1 \times 0,97^{99}$$
   La réponse correcte est donc la réponse (a).

   (a) $100 \times 0,03 \times 0,97^{99}$ (b) $100 \times 0,03^{99} \times 0,97$ (c) $0,03 \times 0,97^{99}$ (d) $0,03^{99} \times 0,97$

Exercice 3. On considère le trapèze rectangle :



Faire correspondre, les produits scalaires suivants avec leur valeur (aucune justification n'est demandée) :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -40$.
3. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 60$.
4. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = -40$.
5. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA} = -36$.

(a) -40.
(b) 60.
(c) 0.
(d) -36
(e) -60.

Exercice 4. On considère les points de coordonnées $E(2,1)$, $F(4,2)$ et $G(4-\sqrt{3}; 2+2\sqrt{3})$.

1. Nature du triangle EFG.
   (a) Déterminer le produit scalaire.

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 1-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4-\sqrt{3}-4 \\ 2+2\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} = -2 \times (-\sqrt{3}) - 1 \times 2\sqrt{3} = 0$$

   Donc les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont orthogonaux.

   (b) En déduire la nature du triangle EFG.
   Le triangle EFG est donc rectangle en F.
2. Angle orienté $(\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG})$
   (a) Déterminer les longueurs : EF et EG :

$$EF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$EG = \sqrt{(4-\sqrt{3})^2 + (1+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - 4\sqrt{3} + 3 + 1 + 4\sqrt{3} + 4 \times 3} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

   (b) Déterminer le produit scalaires :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 2 \times \left(2-\sqrt{3}\right) + 1 + 2\sqrt{3} = 5$$

   (c) En déduire que $\cos\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = \dfrac{1}{2}$ puis déterminer sa valeur.
   En rapprochant les deux questions précédentes :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5}\cos\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = 10 \times \cos\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = \frac{1}{2}$$

   Donc l'angle $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}\right) = \dfrac{\pi}{3}$