Semestre 4 spécialité Mécanique

Suites et séries de fonctions

CC sur les suites et séries de fonctions.

Exercice 1. On considère les fonctions $(f_n)_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on caractérisera. 2 points

b. Étudier la continuité des f_n et de f. Que peut-on en déduire concernant la convergence uniforme ? 2 points

c. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur $[a, +\infty[$. 3 points

Correction :

a Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donc la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ or f est discontinue en 0. Or si la convergence était uniforme, la fonction f serait continue (voir résultat cours). Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

c Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $\forall x \in [a, +\infty[,\ u_n(x) = f(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{nx}{1+nx^2} = \dfrac{1}{x(1+nx^2)}$, alors :

$$\forall x \in [a, +\infty[, u'(x) = -\frac{1+3nx^2}{(x+nx^3)^2} < 0$$

D'où le tableau de variation :

x	a	$+\infty$
$u_n'(x)$	$-$	
u_n	$u_n(a)$	0

$\Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\|_{\infty,[a,+\infty[} = \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a) = \dfrac{1}{a(1+na^2)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a(1+na^2)} = 0.$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction f

Exercice 2. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(n^2+x^2)^2}$.

a. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Notera $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(n^2+x^2)^2}$. 2 points

b. Montrer que la série S est continue sur $\mathbb{R}$ 2 points

c. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$. converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est C^1 sur $\mathbb{R}$. 3 points

Correction :

a. On note $u_n(x) = \dfrac{x}{(n^2+x^2)^2}$. Ces fonctions sont impaires. On a $\forall x \in [0,1],\ u_n'(x) = \dfrac{n^2-3x^2}{(n^2+x^2)^3}$.
Or $(n^2+x^2)^3 > 0$ donc u_n' est du signe de n^2-3x^2. D'où le tableau de variation de u_n :

x	0		$\frac{n}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$	$\frac{9}{16\sqrt{3}n^3}$	$\searrow$	0

Donc $\|u_n\|_\infty = \frac{9}{16\sqrt{3}n^3}$, or d'après le critère de Riemann la série des $\dfrac{1}{n^3}$ est convergente, donc la série des (u_n) est normalement convergente.

b. Elle est donc uniformément convergente or les fonctions u_n sont continues donc S est continue.

c. On note $U_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Ces fonctions sont paires. On a $\|U_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$, or d'après le critère de Riemann la série des $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série des (U_n) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. On a $U_n' = 2u_n$
En résumé, on a :

- la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2U_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, (puisqu'elle converge normalement.)
- pour tout $n \geq 1$, U_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $-2u_n = U_n'$.
- la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -2u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, (car normalement convergente d'après la question a.)

donc, la somme S de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue (voir b.).

Exercice 3. On considère les fonctions $(f_n)_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$

1. Montrer que les f_n convergent simplement vers une fonction f à déterminer. 2 points
2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$. 2 points
3. La convergence de la suite (f_n) est-elle uniforme ? 2 points

Correction :

a. soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ alors $0 \leqslant \cos(x) < 1$ et donc comme $0 \leqslant f_n(x) \leqslant n\cos^n(x)$ et par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ or $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

b. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1}$.

c. Si la convergence de la suite (f_n) était uniforme alors par application du théorème :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx = 0 \qquad \text{Or} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Donc la convergence n'est pas uniforme.