Ex 112 et 113 page 344

Ex 113 page 344

On considère les droites (AB) et $(A'B')$ n'ont coplanaires. Δ leur perpendiculaire commune. H et H' l'intersection de Δ respectivement avec (AB) et $(A'B')$. Soient M et M' deux points respectivement sur (AB) et $(A'B')$.

On note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les plans orthogonales à Δ passant respectivement par H et H'. Ces deux plans sont donc parallèles et contiennent respectivement M et M'. Si l'on note N le projeté de M sur $\mathscr{P}'$, on obtient :

$$MM'^2 = (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'})^2 = MN'^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM'}}_{0} + N'M'^2 \geqslant MN^2 = HH'^2$$

L'égalité $HH' = MN$ vient du fait que les droites (MN) et (HH') sont coplanaires car parallèles et que dans ce plan $MNH'H$ est un rectangle.

On a donc montrer que la plus courte distance entre deux points respectivement de (AB) et $(A'B')$ est la distance HH'. C'est ce que l'on définie comme étant la distance entre deux droites.

Ex 112 page 344 Question 3, 4 et 5.

3.*a*. On a $(AB) \perp (CD)$ et $(BE) \perp (CD)$ donc $(ABE) \perp (CD)$. Comme $(AA') \subset (ABE)$, on a (AA') et (CD) sont orthogonales or $(AA') \perp (BE)$ donc $(AA') \perp (BCD)$.

3.*b*. D'après la question précédente (AA') et (BD). Par ailleurs les côtés opposés sont orthogonaux donc (AC) et (BD) sont orthogonales. Ainsi $(AA'C) \perp (BD)$. Donc (CH) et (BD) orthogonales.

Maintenant comme H est l'orthocentre de (ABE), on a (EH) hauteur et donc (EH) et (AB) orthogonales.

Donc (EH) et (AB) orthogonales et (AB) et (CD) orthogonales donc $(HCD) \perp (AB)$ donc (CH) et (AB) sont orthogonales.

Donc $(CH) \perp (ABD)$. Donc (CH) est la hauteur issue de C. De même on montre que (DH) est la hauteur issue de D. On a montrer plus haut que $(AH) = (AA')$ est la hauteur issue de A.

Comme ces trois hauteur se coupent en H la quatrième passe aussi par H.

4. et 5. voir corrigé du livre.

Donc les