Exercices complémentaires : Probabilités

Exercice 1

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,8$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,9$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,3$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. (a) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
   (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine.
   (c) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
2. A faire plus tard.
   Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre (aucune justification n'est attendue) :
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$$
   (c) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$.
   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$.
   (e) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On dispose de n urnes U_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et dans chaque urne U_k ($k \in [\![1, n]\!]$), on a $2n-(k-1)$ boules blanches et $n+k+1$ boules Noires. On note :

- A_k l'événement, on obtient le nombre k. On considère que les événements A_k sont équiprobables.
- B on obtient une boule blanche lors du tirage.

Déterminer la probabilité d'obtenir une boule B lors du tirage.

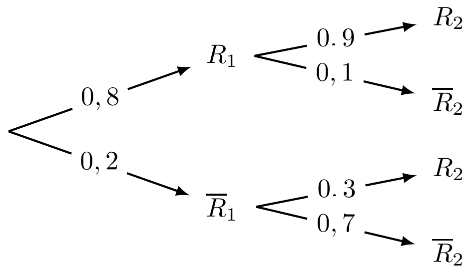
Exercice 3

Une urne contient initialement 5 boules noires et 5 boules blanches. On tire successivement les 10 boules sans remise. Quelle est la probabilité de tirer la première boule blanche au 3-ième tirage ?

Cette fois urne contient initialement n boules blanches et $2n$ boules noires dans l'urne (avec $n \in \mathbb{N}$). Quelle est la probabilité de tirer la première boule blanche au k-ième tirage ?

Réponse de l'exercice 1

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.



(b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$$

(c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

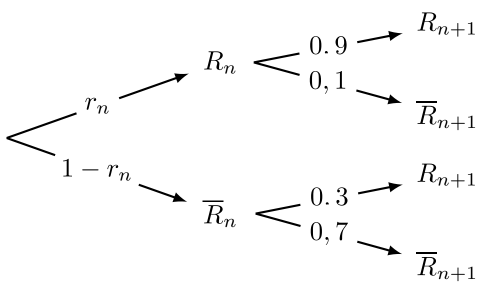
$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = 0,72 + P\left(\overline{R_1}\right) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,72 + 0,2 \times 0,3 = 0,78$$

(d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

$$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P_{\overline{R_1}}(R_2)}{P(R_2)} = \frac{0,06}{0,78} \simeq 0,077 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p\,(R_n)$.

(a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3$.

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(R_{n+1}) &= P(R_n \cap R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= P\left(R_n\right) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P\left(\overline{R_n}\right) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= r_n \times 0,9 + (1 - r_n) \times 0,3 = 0,6r_n + 0,3 \end{aligned}$$

(c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, P_n : " $r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$ ".
Initialisation : $0,05 \times 0,6^{1-1} + 0,75 = 0,8$. Or la probabilité pour que le client ramène la bouteille à l'issue de la première semaine est bien $r_1 = 0,8$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'expression de r_n soit $0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$. Alors :

$$r_{n+1} = 0,6r_n + 0,3 = 0,6\left(0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75\right) + 0,3 = 0,05 \times 0,6^n + 0,6 \times 0,75 + 0,3 = 0,05 \times 0,6^n + 0,75$$

On a donc montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = 0,05 \times 0,6^{n-1} + 0,75$$

(d) Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
On a $|0,6| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0,75$. On en déduit qu'avec le temps, la proportion de client rendant la bouteille se stabilise à 0,75.