Activité produit scalaire.

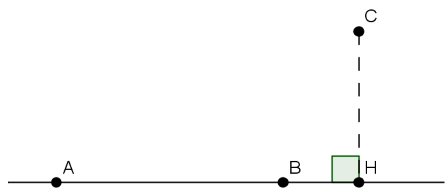
Notation : On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du pan. Dans l'ensemble de ce chapitre on se situera dans ce plan

1 Définition géométrique.

Définition 1

Soit A, B et C trois points du plan (A et B distincts). Soit H l'intersection de la droite (AB) de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C. Le point H est appelé le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Dés lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est définie par :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\times\overline{AH}$$



Si l'on a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Remarque 1. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\geqslant 0$$

.

Remarque 2. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est nul :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

.

Ex 35 à 41 page 217

Définition 2

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. Sinon :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$$

Démonstration 1. Si l'on considère la configuration de la définition 1, et le triangle rectangle en H, AHC. En utilisant la la formule $\cos(\widehat{HAC})=\dfrac{AH}{AC}$ si l'angle est aigu et l'opposé si l'on est obtus, on obtient la formule précédente puisque $\|\overrightarrow{v}\|=AH$.

Proposition 1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$.

Démonstration 2. On a $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u}) = \cos 0 = 1$ donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

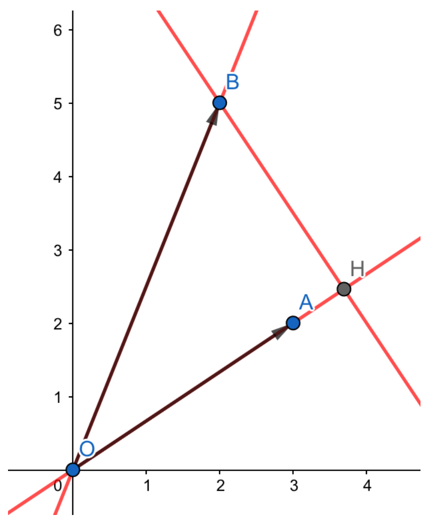
Démonstration 3. On a $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$ donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

Ex 42 à 46 page 218

2 Définition analytique.

Exercice 1. Soient deux vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ non nuls du plan $\mathscr{P}$ repéré par le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

On considère les vecteurs représentant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}$ et H le projeté orthogonal de C sur (OA).



1. Justifiez :
$$\exists\lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{u}$$
2. Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OH}$ sont
$$\overrightarrow{OH} : \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$
3. Déterminer de même les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$.
4. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHB, montrer que l'on obtient après simplification :
$$2\lambda^2(x^2 + y^2) - 2\lambda(xx' + yy') = 0$$
5. Le polynôme précédent est une équation du second degré en λ. Déterminer ses racines et en déduire la valeur de λ.
6. En remarquant que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, montrer que :
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$
(Indication : On utilisera que $\overline{OH} = \lambda\overline{OA}$)