Exercices sur les suites et géométrie vectorielle.

Exercice 1. **Partie A**

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].

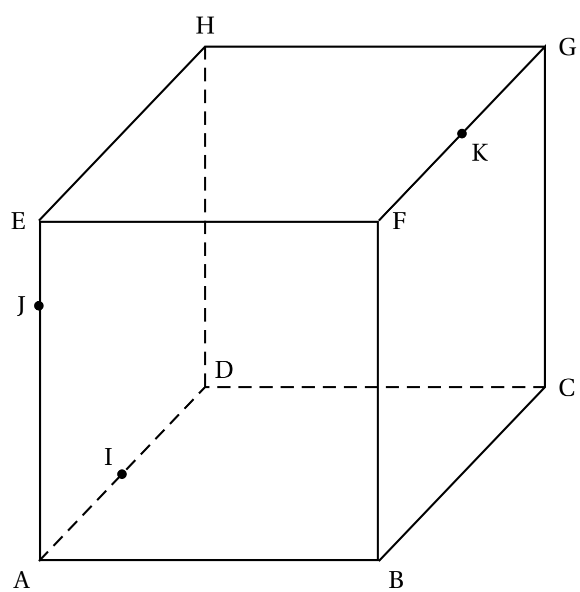
1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG). Vous compléterez la figure en annexe.

Partie B

ABCD est un tétraèdre. M, N, P et Q sont les points définis pas :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

1. Réaliser une figure et placer les points M, N, P et Q.
2. Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$
3. Démontrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires.



Exercice 2. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n\,(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} < 0,9u_n < 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que … faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher …

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n\,(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1,06x(1-x)$$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_{n+1} < v_n < 0,5$.
4. Justifier que (v_n) converge. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :
$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$
5. Déterminer ℓ
6. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?