Étude de fonction polynôme de degré trois.

Exemple 1

Étude de la fonction f définie sur $[-1,2]$ par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

Étape 1

$$f'(x) = 15x^2 - 12x - 3$$

Étape 2

On détermine le signe de la fonction dérivée qui précède. Or f' est une fonction est du second degré. Donc :
$1^{ière}$ **étape : On détermine le discriminant :**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 15 \times (-3) = 324 > 0$$

$2^{ième}$ **étape : Si f' possède des racines (discriminant positif)**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)-\sqrt{324}}{2 \times 15} = -0,2$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)+\sqrt{324}}{2 \times 15} = 1$$

f' est du signe de $a = 15 > 0$ à l'extérieur des racines.

Étape 3

On dresse le tableau de variation.

x	-1		-0.2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	3.36	$\searrow$	0	$\nearrow$	14

Étape 4

On calcul les valeurs remarquables pour compléter le tableau de variation ("extrémités des flèches") : Ici on calcul les images de -1, -0,2, 1 et 2 pour compléter le tableau.
Par exemple pour calculer l'image de -1 par f :

$$f(-1) = 5 \times (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 4 = -4$$

De la même façon, on obtient : $f(-0,2) = 3,36$ puis $f(1) = 0$ et enfin $f(2) = 14$.