Durée : 4 heures

Baccalauréat Spécialité Bac

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

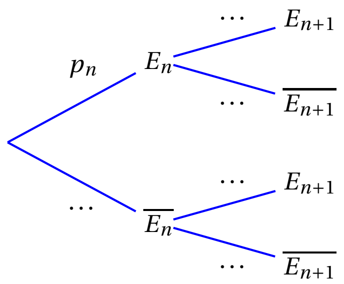
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0,05 - 10^{-\text{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times$ P $+ 0,04$
	J prend la valeur J $+1$
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.
On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.
On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :
— A : « La pièce est produite par la machine A »
— B : « La pièce est produite par la machine B »
— D : « La pièce a un défaut ».
— $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c. Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

d. On constate que la pièce choisie a un défaut.
Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.
On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Dans cette question, on prend $n = 150$.
Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

c. Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.
Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

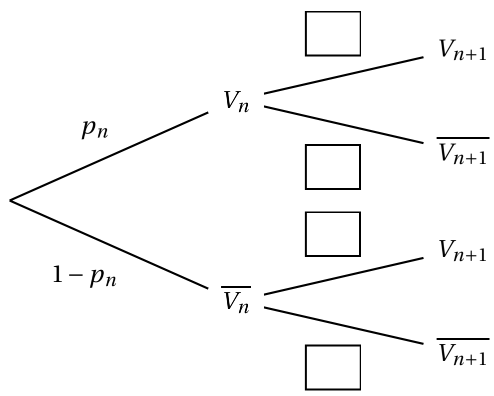
Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - **a.** A : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs » ;
   - **b.** B : « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^e^ sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   - **a.** Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   - **b.** Exprimer p_n en fonction de n.
   - **c.** Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.