Exercices types.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   .

   (c) Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

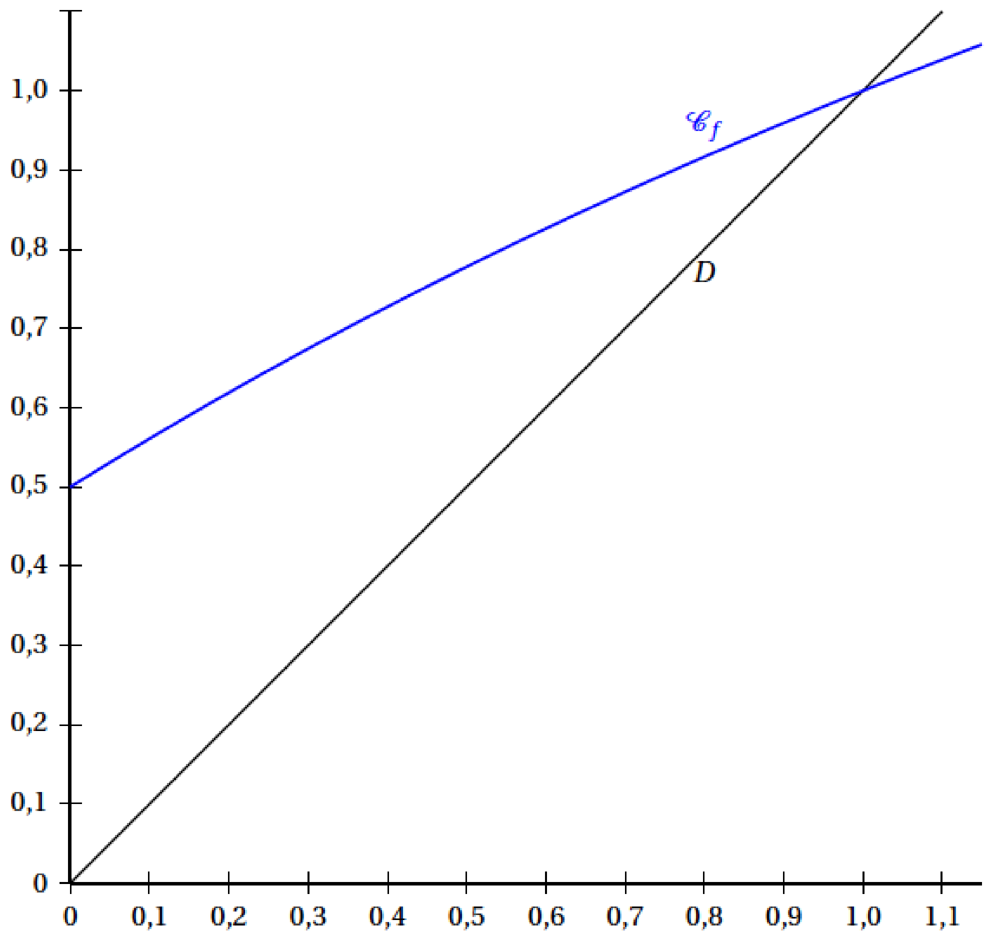
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe

À rendre avec la copie



Exercice 2

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{6}$.

Pour tout entier n, on pose $v_n = 2u_n + 1$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction n.
3. Déterminer les variations de (v_n) et sa limite. Idem pour (u_n).

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

Exercice 4

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$. Étudiez cette suite.