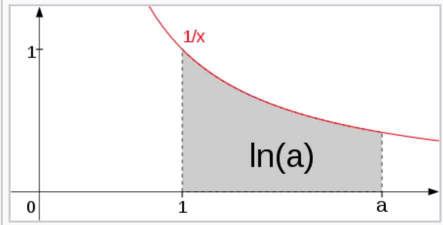
Chapitre 6 : Logarithme.

I Un peu d'histoire.

Ce logarithme est appelé népérien, en hommage au mathématicien écossais John Napier qui établit les premières tables logarithmiques (lesquelles ne sont en fait pas des tables de logarithmes népériens). On date en général l'origine des logarithmes népériens en 1647, lorsque Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété d'additivité des fonctions logarithmes. Saint-Vincent ne voit cependant pas de lien avec les logarithmes de Napier, et c'est son disciple Alphonse Antoine de Sarasa qui l'expliquera en 1649. Le logarithme népérien s'est tout d'abord appelé logarithme hyperbolique, en référence à l'aire sous l'hyperbole qu'il représente. L'appellation logarithme naturel apparaît pour la première fois en 1668, dans une note de Nicolaus Mercator sur la série qui porte son nom 13. Cette série, exploitée par Newton en 167114, permet de calculer assez simplement les valeurs du logarithme de Grégoire de Saint-Vincent. Le calcul des autres logarithmes apparaît alors bien compliqué et, naturellement, celui de Grégoire de Saint-Vincent devient alors le logarithme le plus naturel.



Pour tout réel a > 0, ln(a) peut être défini comme l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction x↦1/x, l'axe des abscisses et les droites d'abscisses 1 et a.

II Attendus

- Savoir résoudre les équations du type $\mathrm{e}^X = k$ et $\ln X = k$. *(1-2 page 91)*
- Savoir simplifier une expression en utilisant les propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentiel. *(14 page 95)*
- Savoir résoudre des équations et inéquations en utilisant les propriétés algébriques du logarithme et de l'exponentiel. *(10 page 93)*
- Savoir étudier une fonction. *(9 page 93)*
- Savoir primitiver $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{u'}{u}$.
- Savoir utiliser le logarithme pour tous les attendus des chapitres précédent, applicables au fonction faisant intervenir le logarithme.

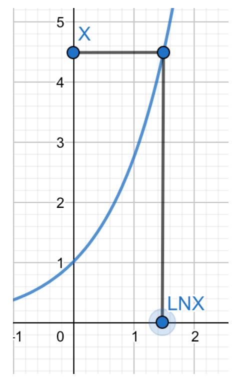
III Définition et propriétés algébriques du logarithme népérien.

A Définition.

Définition 1

La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ qui à tout réel strictement positif x associe l'unique réel y solution de l'équation :

$$\mathrm{e}^y = x$$



On note cette solution : $y = \ln x$.

Exercices 29 à 43 page 98-99

B Lien avec l'exponentielle.

Proposition 1

Du fait de la définition :

- $\mathrm{e}^y = x \Leftrightarrow \ln x = y$.
- $\forall x \in]0, +\infty[, \mathrm{e}^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.

Proposition 2

On a les valeurs déduites de celles de l'exponentielle :

- $\mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow \ln \mathrm{e} = 1$.
- $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -1$.

C Équation et inéquation.

Proposition 3

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$. (vrai aussi pour $<$ ...)

Démonstration 1. En posant $x = \ln a$ et $y = \ln a$ (donc $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^y$), on déduit la proposition précédente des propriétés suivantes :

$$x = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \qquad \textit{et} \qquad x \leqslant y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^y$$

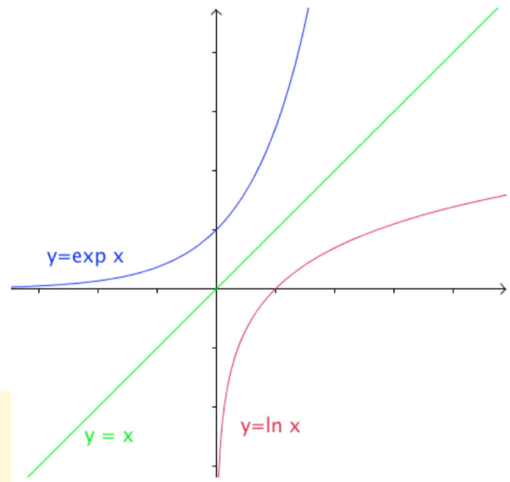
Exercices 73 à 83 page 101

Vidéo 1

- Résoudre une équation 1.
- Résoudre une équation 2.
- Résoudre une équation 3.
- résoudre une inéquation

D Représentation graphique du logarithme.

On obtient la représentation graphique du logarithme à partir de celle de l'exponentielle par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Vidéo 2

Position relative des deux courbes.

E Propriétés algébrique du logarithme.

Proposition 4

Soient a et b deux réels strictement positifs (et l'on pose $x = \ln a$ et $y = \ln b$). Soit n un entier naturel. On obtient les propriétés algébriques du logarithme à partir des propriétés algébriques de l'exponentielle :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$
- $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{-y}$
- $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
- $\left(\mathrm{e}^x\right)^n = \mathrm{e}^{nx}$

Démonstration 2. En posant $x = \ln a$ et $y = \ln a$ (donc $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^y$), on déduit la proposition précédente des propriétés suivantes :

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\textit{On applique } \ln} \ln\left(\mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b}\right) = \ln(ab) = \ln\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = x + y = \ln a + \ln b$$

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\textit{On applique } \ln} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\ln a}}{\mathrm{e}^{\ln b}}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{x-y}\right) = x - y = \ln a - \ln b$$

$$\left(\mathrm{e}^x\right)^n = \mathrm{e}^{nx} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\textit{On applique } \ln} \ln\left(a^n\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{na}\right) = nx = n \ln a$$

Exercices 67 à 72 page 100.

Vidéo 3

Les formules précédentes permettent de simplifier des expressions notamment.

IV Fonction logarithme.

Vidéo 4

Étude complète de la fonction logarithme.

A Dérivée.

Proposition 5

Pour $x > 0$, on a : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. | Donc une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$.

Vidéo 5

Étude de variation.

B Tableau de variation.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercices 44 à 58 page 100.

C Convexité.

Proposition 6

La fonction logarithme est concave sur $]0, +\infty[$.

En effet, $\ln''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$. D'où le résultat.

Vidéo 6

Utilisation de la concavité du logarithme.