Feuille Wims 2 second degré (suite).

Exercice 1 *(Difficile)*
Trouver deux nombres x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, dont la différence vaut $\frac{11}{2}$ et dont le produit vaut -7.
Pour éviter toute ambiguïté on utilisera les notation : $u = x_1$ et $v = x_2$.
$1^{ière}$ ***étape :*** *On détermine le système :*

$$\begin{cases} v - u = \frac{11}{2} \\ uv = -7 \end{cases}$$

$2^{ième}$ ***étape :*** *On utilise la substitution pour se "ramener à une seule équation" :*

$$\begin{cases} v - u = \frac{11}{2} \\ uv = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{11}{2} + u \\ u(\frac{11}{2} + u) = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{11}{2} + u \\ u^2 + \frac{11}{2}u + 7 = 0 \end{cases}$$

$3^{ième}$ ***étape :*** *On résout l'équation du second degré. On calcul $\Delta = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 7 = \frac{9}{4} > 0$. Il y a donc deux racines :*

$$u = \frac{-\frac{11}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times 1} = \frac{-7}{2} \quad \text{et alors} \quad v = \frac{11}{2} - \frac{7}{2} = 2$$

ou

$$u = \frac{-\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2 \times 1} = -2 \quad \text{et alors} \quad v = \frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}$$

Exercice 2 *(Difficile) Un triangle rectangle a une hypoténuse de longueur $100cm$ et une aire de $2400cm^2$. Notons u et v les deux cotés de ce triangle.*
$1^{ière}$ ***étape :*** *On détermine le système vérifié par u et v (un utilisant la formule donnant l'air d'un triangle et le théorème de Pythagore :*

$$\begin{cases} \frac{uv}{2} = 2400 \\ u^2 + v^2 = 100^2 \end{cases}$$

$2^{ième}$ ***étape :*** *On utilise la substitution pour se "ramener à une seule équation" :*

$$\begin{cases} u = \frac{4800}{v} \\ \left(\frac{4800}{v}\right)^2 + v^2 = 100^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{4800}{v} \\ \left(\frac{4800^2 + v^4}{v^2}\right) = 100^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{4800}{v} \\ . \\ \left(4800^2 + v^4\right) = 100^2 v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{4800}{v} \\ v^4 - 10000v^2 + 23040000 = 0 \end{cases}$$

$3^{ième}$ ***étape :*** *On fait le changement de variable $V = v^2$, pour pouvoir obtenir une équation du second degré.*

$$V^2 - 10000V + 23040000 = 0$$

$4^{ième}$ ***étape :*** *On résout l'équation du second degré. On calcul $\Delta = 7840000 = 2800^2 > 0$. Il y a donc deux racines :*

$$V_1 = \frac{10000 - 2800}{2 \times 1} = 3600 = 60^2 \quad ou \quad V_1 = \frac{10000 + 2800}{2 \times 1} = 6400 = 80^2$$

$4^{ième}$ ***étape :*** *On a donc deux solution pour $v = \sqrt{3600} = 60$ et alors $u = \frac{4800}{60} = 80$ ou $v = \sqrt{6400} = 80$ et alors $u = \frac{4800}{80} = 60$.*
Le petit côté est donc 60 et le grand 80.

Exercice 3 *(Difficile) R_1 et R_2 sont deux résistances inconnues. Si on les branche en parallèle, on obtient une résistance équivalente de $\frac{55}{16}\Omega$. Si on les branche en série, on obtient une résistance équivalente de 16Ω. Déterminer les valeurs de R_1 et R_2.*

$1^{ière}$ ***étape :*** *On détermine le système :*

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 16 \\ \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{16}{55} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = 16 \\ R_2 + R_1 = \dfrac{16 \times R_1 \times R_2}{55} \end{cases}$$

$2^{ième}$ ***étape :*** *On utilise la substitution pour se "ramener à une seule équation" :*

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 16 \\ R_2 + R_1 = \dfrac{R_1 \times R_2}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 16 - R_2 \\ R_2 + 16 - R_2 = \dfrac{16\,(16 - R_2) \times R_2}{55} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 16 - R_2 \\ 55 = (16 - R_2) \times R_2 = 16R_2 - R_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1 = 16 - R_2 \\ R_2^2 - 16R_2 + 55 = 0 \end{cases}$$

$4^{ième}$ ***étape :*** *On résout l'équation du second degré. On calcul $\Delta = 36 = 6^2 > 0$. Il y a donc deux racines :*

$$R_2 = \frac{16-6}{2\times 1} = 5 \; et \; R_1 = 16 - 5 = 11 \quad ou \quad R_2 = \frac{16+6}{2\times 1} = 11 \; et \; R_1 = 16 - 11 = 5$$

Exercice 4 *(Assez Facile) Voir cours*

Exercice 5 *(Modéré)*

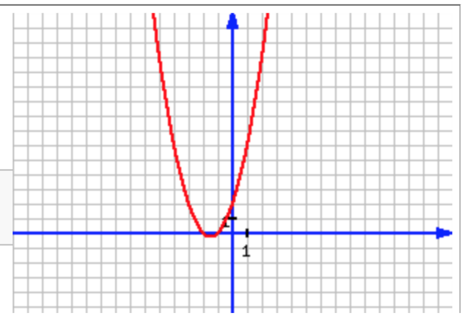
On a représenté ci-dessous une parabole $\mathscr{P}$ d'équation:

$$\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$$

Par lecture graphique des points d'intersection avec les axes de coordonnées, déterminer une équation de $\mathscr{P}$:

Donner une forme factorisée de préférence.

$\mathscr{P}$:y= x^2+3*x+2 [1]



Par lecture graphique les racines sont -1 et -2. D'où la forme factorisé :

$$P(x) = a(x+1)(x+2)$$

Ensuite, en utilisant l'intersection avec l'axe des ordonnés, on a $P(0) = 2$, donc $2a = 2$ donc $a = 1$. D'où :

$$P(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$$

Exercice 6 *(Modéré)*

On a représenté ci-dessous une parabole $\mathscr{P}$ d'équation:

$$\mathscr{P} : y = ax^2 + bx + c$$

Par lecture graphique des points d'intersection avec les droites d'équation $y = -7$ et $x = 0$, déterminer une équation de $\mathscr{P}$:

Donner une forme semi-factorisée de préférence du type $\alpha(x-\beta)(x-\gamma)+\delta$.

$\mathscr{P}$:y= -4/3*(x+2)*(x-3)-7 [1]

Au vu de l'expression demandé il faut que $P(\beta) = P(\gamma) = -7 = \delta$. *On choisit donc* $\alpha = -2$ *et* $\gamma = 3$. *Donc :*

$$P(x) = a(x+2)(x-3) - 7$$

Il ne manque plus que la valeur de a. *On utilise alors que* $P(0) = 1$ *donc* $a \times 2 \times (-3) - 7 = 1$ *donc* $a = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3}$.

Exercice 7 *(Modéré)* ***vidéo avec explication***
Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. *On remarque que* $P(2) = 0$ *(c'est-à-dire que* 2 *est racine). On peut alors factoriser* P *sous la forme :*

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Si l'on développe, on obtient :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -9 \\ c - 2b = 7 \\ -2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

Exercice 8 *Idem précédent. Mais il faut ensuite donner le nombre de racines au total sans oublié la raine* "2".

Exercice 9 *(Facile) en utilisant les méthodes déjà vues.*

Exercice 10 *Très proche du précédent. (Comme* β *est dans la parenthèse il faut le "remplacer" par :* $\frac{\beta}{a}$*)*

Exercice 11 *(assez facile) On a la parabole* $\mathscr{P}$ *d'équation :*

$$\mathscr{P} : y = \frac{-7}{256}x^2$$

ainsi que la droite d'équation $\mathscr{D}$ *d'équation :*

$$\mathscr{D} : y = \frac{7}{8}x + 7$$

Déterminer le nombre de point(s) d'intersection.
Pour trouver les points d'intersection, on résout

$$\frac{-7}{256}x^2 = \frac{7}{8}x + 7 \Leftrightarrow \frac{7}{256}x^2 + \frac{7}{8}x + 7 = 0$$

Avec le signe de Δ *on détermine le nombre de points d'intersection.*

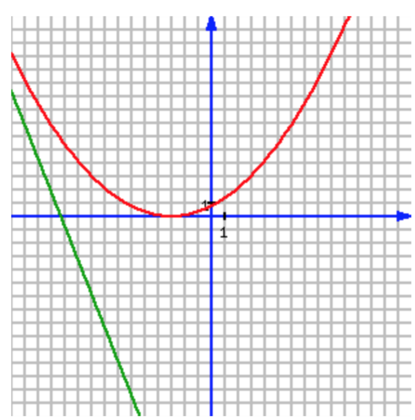
Exercice 12 *(modéré)*

On a représenté une parabole $\mathscr{P}$ d'équation:

$$\mathscr{P} : y = \frac{19}{225}x^2 + \frac{38}{75}x + \frac{19}{25}$$

ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation:

$$\mathscr{D} : y = -\frac{38}{15}x + t$$



Pour quelle valeur de t la droite $\mathscr{D}$ est-elle tangente à la parabole $\mathscr{P}$?

t= **-133/5** [1]

Solution.

On veut que l'équation $\frac{19}{225}x^2 + \frac{38}{75}x + \frac{19}{25} = -\frac{38}{15}x + t$ ait une seule solution, c'est-à-dire que le discriminant de $19x^2 + 684x - 225t + 171 = 0$ soit nul.

$$\Delta = (+684)^2 - 4 \times 19 \times (-225t + 171) = 0 \Leftrightarrow t = -133/5$$

Exercice 13 *Voir exercice 7*

Exercice 14 *(Facile) avec les formules (essayer sans calculatrice mais vérifier avec la calculatrice)*

Exercice 15 *Résoudre l'équation* (E) *:* $x^2 - 4x + 6 = (-9x - 7)(x + 6)$.

$$x^2 - 4x + 6 = (-9x - 7)(x + 6) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = -9x^2 - 61x - 42 \Leftrightarrow 10x^2 + 57x + 48 = 0$$

Et donc $\Delta = 1329$ *et on détermine les racines.*

Exercice 16 *(assez facile) voir le cours sur les tableaux de signes.*

Exercice 17 *(assez facile) voir le cours sur les tableaux de signes.*

Signe d'un trinôme, inéquations 3

On définit les réels a et b par $a = \frac{1}{18}\left(-6 - \sqrt{252}\right)$ et $b = \frac{1}{18}\left(-6 + \sqrt{252}\right)$.

On considère le trinôme du second degré $P(x) = 9x^2 + 6x - 6$.

Construire le tableau des signes correspondant à P.

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$	[1]
signe P		+	0	-	0	+		[2]

Attention: Les deux lignes du tableau doivent avoir le même nombre d'étiquettes, utiliser l'étiquette vide pour compléter et aligner, mais ne pas mettre plusieurs étiquettes vides côte à côte.

En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$:

S=	]	$-\infty$	;	a	]	∪	[	b	;	$+\infty$	[	[3]

Exercice 18 *Voir formule du cours V.B page 4 :*

Soit $P(x) = x^2 - 2x + 1$. *Somme et produit des racines :* $\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 \\ (x_1 + x_2) = \frac{-b}{a} = -2 \end{cases}$

Exercice 19 *(assez facile)*

Variation d'un trinôme du second degré 1

Compléter le tableau des variations de la fonction f telle que $f(x) = 6x^2 + 5x + 7$.

Donner les valeurs exactes des coordonnées du sommet de la parabole.

x	$-\infty$	-5/12 [1]	$+\infty$
var f	↘ [2]	143/24 [3]	↗ [4]

Exercice 20 *(assez facile)*

Variation d'un trinôme du second degré 3

1. Compléter, par les valeurs exactes, le tableau des variations de la fonction f définie sur [-17/4;23/4] par $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

x	$-\dfrac{17}{4}$		3/4 [1]		$\dfrac{23}{4}$
var f	351/8 [2]	↘	-49/8 [3]	↗	351/8 [4]

2. Par lecture du tableau, donner le nombre de solutions sur [-17/4;23/4] des équations suivantes:
   1. $f(x) = 0$: **deux solutions distinctes** [5]
   2. $f(x) = -\dfrac{49}{8}$: **une solution unique** [6]
   3. $f(x) = 38$: **deux solutions distinctes** [7]