Chapitre 5 : Intégration.

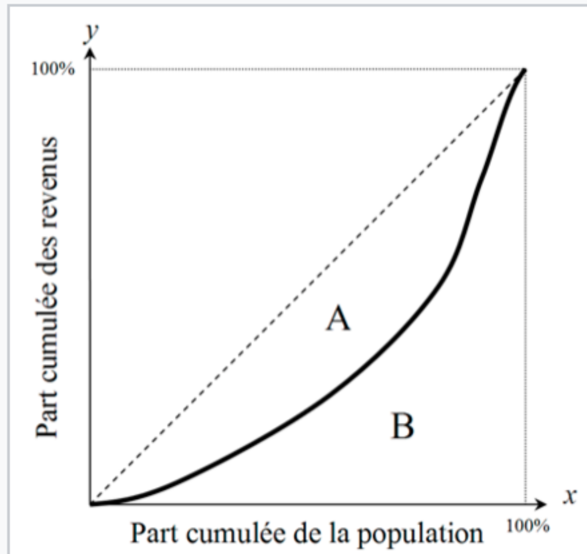
I Un peu d'histoire.

C'est Leibniz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration (Geometria recondita , 1686). En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

La formalisation de cette théorie a revêtu diverses formes. Elle aboutit tardivement, à cause de la complexité des problèmes soulevés.

L'intégrale de Riemann (Bernhard Riemann, 1854, publication posthume en 1867) puis l'intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) ont marqué les esprits par leur formalisation aboutie. Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

Un exemple d'utilisation de l'intégration en économie est le coefficient de Gini : mesure statistique de la dispersion de la distribution des richesses dans une population donnée. Une première approche consiste à définir le coefficient de Gini comme le double de l'aire comprise entre la courbe de Lorenz de la distribution des revenus et la courbe de Lorenz associée à une situation théorique totalement égalitaire (dans laquelle tous les individus auraient exactement les mêmes gains). Cette aire est notée A sur la figure ci-contre, la courbe de Lorenz observée figurant en gras. L'aire notée B est celle comprise entre la courbe de Lorenz observée et la courbe de Lorenz associée à une situation totalement inégalitaire (dans laquelle une partie infime de la population détiendrait la totalité des richesses).



Courbe de Lorenz (en gras) comparée à la courbe théorique pour une situation égalitaire (en pointillés). Le coefficient de Gini vaut alors $G = 2A = 1\text{-}2B$.

II Attendus

- Savoir faire une estimation graphique de la valeur d'une intégrale comme l'aire sous la courbe.
- Savoir déterminer si une fonction F est la primitive d'une fonction f (c'est-à-dire savoir montrer que $F' = f$) *(1 page 141)*
- Savoir déterminer une primitive en utilisant les tableaux donnant les primitives usuelles ou le tableau des opération sur les primitives. *(16-17 page 143)*
- Savoir déterminer **la** primitive ayant une valeur donnée.
- Savoir calculer une intégrale en déterminant la primitive de la fonction à intégrer.
- Savoir déterminer la valeur moyenne d'une fonction.
- Connaitre et savoir utiliser les fonctions :
  - La relation de Chasles.
  - La positivité de l'intégrale.
  - La linéarité de l'intégrale.
- Savoir déterminer l'aire entre deux courbes en l'interprétant comme la différence de deux intégrales.

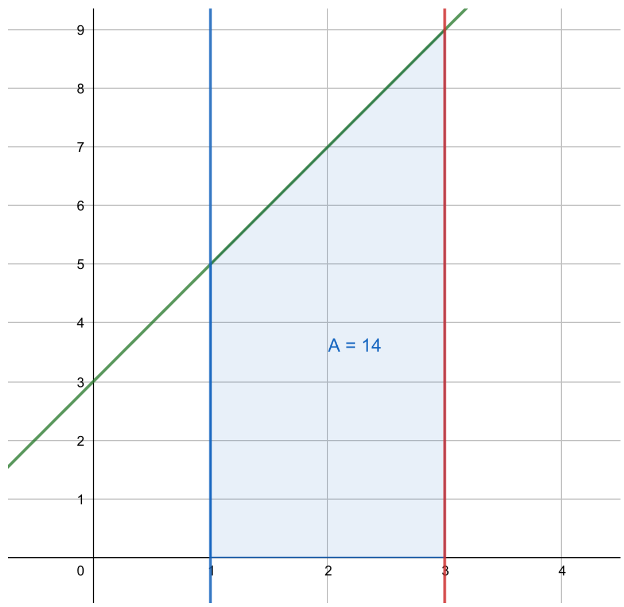
III Intégrale et calcul d'aire

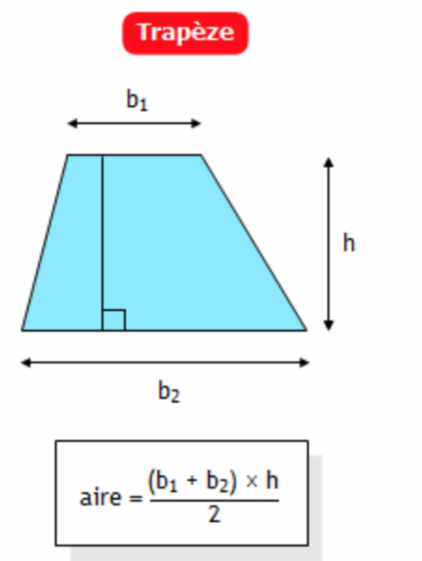
A Exemple de situation.

Exercice 1. On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 3$$

On a représenté ci-dessous à gauche les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f. A droite nous avons rappelé la formule permettant d'obtenir l'aire d'un trapèze.





1. Retrouvez par le calcul, l'aire comprise entre les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$ ainsi que l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$.
   On notera cette aire :
$$A = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$$
2. Faire de même pour déterminer les valeurs de :

- $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 2. Déterminer les valeurs de :

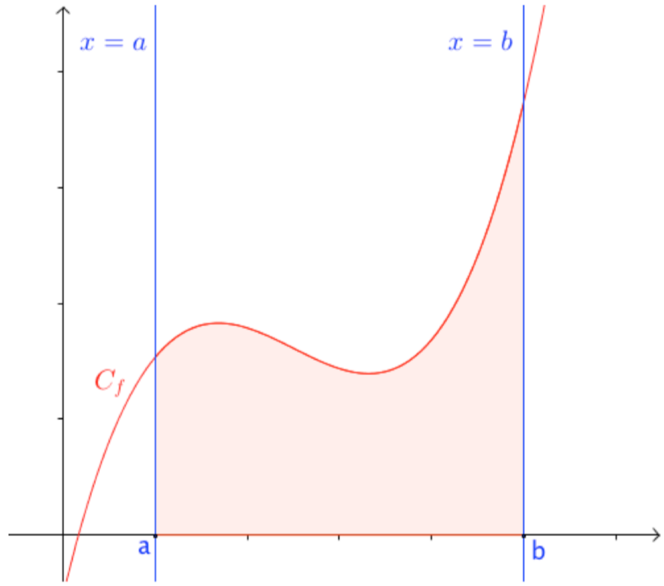
- $\displaystyle\int_{-1}^2 (9 - 3x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^5 \left(7 - \frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x$

B Définition et propriété graphique.

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On a la notation :

$$Aire = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Exercices 55-60 page 150

Proposition 1

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- Soit $c \in [a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Relation de Chasles)}$$

- Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a; b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Positivité de l'intégrale)}$$

- On a :

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$

- Soit k un réel positif, on a :

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$

Remarque 1. Toutes les propriétés précédentes peuvent s'observer graphiquement.

Vidéo 1

Déterminer une intégrale par calculs d'aire.

IV Primitives.

A Définition.

Définition 2

Soit f une continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On dira de F que c'est une primitive de f, si pour tout $x \in [a;b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

Exercices 61-70 page 150-151

Proposition 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f. Alors :

- L'ensemble des primitives de f sur $[a;b]$ est constitué des fonctions G définie sur $[a;b]$ par :

$$G(x) = F(x) + C \qquad où \qquad C \in \mathbb{R}$$

- On remarque que l'on peut imposer que $G(x_0) = y_0$ (où $x_0 \in [a;b]$ et $y_0 \in R$)et dans ce cas la primitive est unique.

Démonstration 1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F et G deux primitives de f. Soit la fonction H définie par :

$$\forall x \in [a;b], H(x) = G(x) - F(x)$$

Alors :

$$\forall x \in [a;b], H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc puisque la dérivée de H est nulle alors la fonction H est une constante que l'on peut noter $C \in \mathbb{R}$. On obtient donc :

$$\forall x \in [a;b], G(x) = F(x) + C$$

Soit $x_0 \in [a;b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Si l'on impose $F(x_0) = y_0$ et $G(x_0) = y_0$, on obtient :

$$H(x_0) = G(x_0) - F(x_0) = 0 = C$$

Donc :

$$\forall x \in [a;b], F(x) = G(x)$$

Donc $F = G$.

Exercices 71-75 pages 151 et 83-85 page 152

B Primitives des fonction usuelles.

Toutes les primitives ci-dessous sont connues à une constante $C \in \mathbb{R}$ près.

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	$C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	x	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

C Opérations sur les primitives.

Toutes les primitives ci-dessous sont connues à une constante $C \in \mathbb{R}$ près.
On désigne par u est v deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I.

f définie sur I par	Primitives F de f sur I
$u' + v'$	$u + v$
ku'	ku
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}$ où u ne s'annule pas sur I	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ où $u > 0$ sur I	$2\sqrt{u} + C$, $C \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$ où $u > 0$ sur I	$\ln u$

Exercices 76-82 page 151-152

Vidéo 2

Chercher une primitive en utilisant les tableaux précédents :

- vidéo 1
- Vidéo 2
- Vidéo 3
- vidéo 4

Vidéo 3

Rechercher **la** primitive prenant une valeur données.

V Intégrale d'une fonction de signe quelconque

A Définition.

Définition 3

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Exemple 1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

On remarque que si l'on pose :

$$F(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2$$

Alors :

$$F'(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

On donc dire que F est une primitive de f. On a donc par exemple :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2 + 6x + 5\mathrm{d}x = \left[x^3 + 3x^2 + 5x + 2\right]_0^1 = (1^3 + 3 \times 1^2 + 5 \times 1 + 2) - (0^3 + 3 \times 0^2 + 5 \times 0 + 2) = 9$$

Remarque 2. On remarque que l'on aurez pu choisir dans l'exemple précédent, une infinité d'autre fonction primitive de f à la place de la fonction F. En effet la constante 2 en fin d'expression n'apparait plus lors du calcul de la dérivée de F.

Exercices 86-90 page 152

Vidéo 4

Calculer une intégrale à partir d'une primitive :

- Vidéo 1
- Vidéo 2
- vidéo 3

B Fonction définie par une intégrale.

Proposition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction continue définie sur un intervalle $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Alors, la dérivée de la fonction F est la fonction f. C'est à dire pour tout $x \in [a;b]$:

$$F'(x) = f(x)$$

On dira de F que c'est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration 2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit G une primitive de f et F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

On a donc :

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Donc :

$$F'(x) = G'(x) \qquad et \qquad F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = G(a) - G(a) = 0$$

Exemple 2. Si l'on pose :

$$F(x) = \int_1^x 3t^2 + 6t + 5\mathrm{d}t$$

Alors on a :

$$F'(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

Dans ce cas, il est facile de déterminer F :

$$F(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 9$$

Pour que $F(1) = 0$.

C Propriétés du calcul intégrale.

Proposition 4

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

- Soit $c \in [a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Relation de Chasles)}$$

- On a :

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad et \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

- Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Positivité de l'intégrale)}$$

- On a :

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$

- Soit k un réel positif, on a :

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(Linéarité de l'intégrale)}$$

Démonstration 3. Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Démonstration 4. D'une part :

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

et d'autre part,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$$

d'où les deux résultats.

Démonstration 5. Soient F et G des primitives de f et g respectivement.
Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' = f + g$
et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)x\,dx.\end{aligned}$$

Démonstration 6. De même, kF est une primitive de kf et

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Exercices 96-102 page 153

Vidéo 5

Une utilisation très fréquente au **bac** de la propriété :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

En effet, nous pouvons alors parler de l'aire situé entre les deux courbes.

Vidéo 6

Exemple d'utilisation de la linéarité.

Vidéo 7

Exemple d'encadrement d'une intégrale

D Valeur moyenne.

Définition 4

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

91-96 page 152-153

Vidéo 8

Exemple de calcul de la moyenne d'une fonction