Chapitre 1 : Limites de suites .

I Approche Globale.

A Un peu d'histoire.

On fait souvent remonter la récurrence à Euclide , l'exemple habituellement donné est la proposition 20 du livre IX des Éléments, où est prouvée l'existence d'une quantité arbitrairement grande de nombres premiers. Il y a l'esquisse d'une récurrence, mais elle n'est pas explicitée ; en outre l'idée d'une infinité de nombres premiers est absente.

Euclide : 300 av. J.-C.

Vers l'an 1000, le persan Al-Karaji établit la formule du binôme de Newton (en fait il n'a pas les notations qui lui permettraient de l'énoncer dans le cas général, mais les méthodes fonctionnent pour un entier arbitraire). Il calcule également la somme des cubes des n premiers entiers naturels, al-Samaw'al poursuit ses travaux.

Al-Karaji (953-1029)

Newton : 1643 -1727

Nicolas Oresme , mathématicien français du XIV siècle a étudié les suites arithmétiques et géométriques ainsi que la somme des termes de certaines d'entre-elles. Oresme est le premier à utiliser le Français dans les textes mathématiques, il est aussi persuadé, bien avant Galilée, de la rotation de la Terre autour du Soleil. Il a inventé, avant Descartes, le premier système de coordonnées.

Oresme 1320-1382

L'idée de fonction est plus récente, elle date des $XVII$ et $XVIII$ siècles.

Les mathématiciens ont alors montré qu'une suite est une fonction particulière.

Les fondements rigoureux de la théorie des suites sont posés au début du XIX siècle par le français Augustin Cauchy , l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Cauchy 1789-1857

B Attendus.

- Tous les attendus de première.
- Démontrer qu'une suite diverge vers $+\infty$. *(1 page 45)*
- Démontrer qu'une suite tend vers 0. *(2 page 45)*
- Utiliser un théorème de comparaison *(8 page 47)*
- Utiliser le théorème des gendarmes. *(9 page 47)*
- Savoir compléter intuitivement les tableaux sur les opérations et limites. *(page 48)*
- Savoir appliquer ces règles. *(19-20 page 49)*
- Savoir représenter une suite récurrente et en déduire les variation et limite à partir de cette représentation.
- Savoir

programmer une suite récurrente sur la calculatrice et sous forme algorithme (avec Python par exemple).

***Vidéo* 1.** Calculatrice

C Démonstrations à connaître.

- Unicité de la limite.
- Théorème de comparaison.

II Comportement d'une suite à l'infini

A Convergence

Définition 1 (Limite finie)

Soit l un réel et (u_n) une suite.
On dit que la suite (u_n) converge vers l si pour tout intervalle **ouvert** contenant l il existe un rang à partir duquel tout les u_n sont contenus dans cet intervalle.
On dit alors que l est la **limite** de la suite (u_n) et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si une suite de converge pas, on dit que la suite est **divergente**.

***A retenir* 1.** . Il y a deux types de divergence : les suites ayant une limite infinie ou celles qui n'ont pas de limite.

Exemple 1. Les suites de termes générales $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^p}$ avec p un réel positif convergent toutes vers 0.

Démonstration pour $\frac{1}{n}$: Soit (u_n) la suite de terme général $\frac{1}{n}$ et α un réel non nul.
On note alors n_0 le plus petit entier tel que $n_0 > \frac{1}{\alpha}$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]0-\alpha; 0+\alpha[$. □

Proposition 1

Lorsqu'une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.

Démonstration 1. Raisonnement par l'absurde.
On suppose l'existence d'une suite (u_n) qui tendrait vers deux limites distinctes l et l' (avec $l < l'$).
Alors, on choisit $\epsilon = \dfrac{l'-l}{3}$ et $I =]l-\epsilon; l+\epsilon[$ et $I' =]l'-\epsilon; l'+\epsilon[$.
Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow u_n \in I \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow u_n \in I'$$

Si l'on note $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in I \cap I'$$

Or $I \cap I' = \varnothing$, d'où la contradiction.

B Limite infinie.

Définition 2 (Limite infinie)

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout A réel alors il existe un rang à partir duquel tout les termes de la suite sont contenus dans l'intervalle $]A; +\infty[$.
On écrit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On peut écrire une définition similaire pour une limite de $-\infty$.

Exemple 2. Les suites de termes générales n, n^2, $n^2 - 3n + 1$.

Démonstration 2 (Démonstration pour n^2 :). Soit (u_n) la suite de terme général n et α un réel non nul.
On note alors n_0 le plus petit entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

III Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère (u_n) et (v_n) deux suites et l et l' deux réels.

A Limite d'une somme.

***Vidéo* 2.** Opération sur les limites 1

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

B Limite d'un produit.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$									

C Limite d'un quotient.

Dans cette partie, on suppose que v_n ne s'annule pas. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l}<0$ pour noté $l<0$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$												

D Indéterminations.

On constate plusieurs cas d'indétermination dans les tableaux précédents.

Exemple 3. Les suites dont les termes généraux sont :

- $u_n = n^2-3n$
- $v_n = \dfrac{5n^2+3}{2n^2-3n+1}$
- $w_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
- $t_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Vidéo 3. exemple 1
Vidéo 4. exemple 2
Vidéo 5. exemple3
Vidéo 6. exmple 4

IV Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Formule de récurrence.	• $u_{n+1}=u_n+r$ (où r est la raison) Si $u_{n+1}-u_n=r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.	• $v_{n+1}=q\times v_n$ (où q est la raison) Si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=q$ alors (v_n) est géométrique de raison q.
Variations.	• Si $r>0$ la suite (u_n) est croissante. • Si $r<0$ la suite (u_n) est décroissante.	• Si $0<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$. • Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$. • Si $1<q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
Limite.	• Si $r>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. • Si $r<0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.	(voir tableau ci-dessous)
Expression en fonction de n.	• $u_n=nR+u_0$. • $u_n=(n-k)r+u_k$.	• $v_n=q^nv_0$. • $v_n=q^{n-k}v_k$.
Somme de termes.	• $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ • $\dfrac{1^{ier}\text{terme}+\text{der terme}}{2}\text{nb termes}$	• $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k=1+q+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ • $1^{ier}\text{terme}\times\dfrac{q^{\text{nb termes}}-1}{q-1}=1^{ier}\text{ter}\times\dfrac{1-q^{\text{nb ter}}}{1-q}$

Limite (suite géométrique) :

	1^{ier} terme >0	1^{ier} terme <0
Si $0<q<1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $q=1$	u_n constante	u_n constante
Si $1<q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

V Cas de convergence

A Comparaison de suites.

Proposition 2

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Soit $l\in\mathbb{R}$.

- Si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
- Si $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=+\infty$.
- Si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l$.

"Théorème des gendarmes"

Démonstration 3. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \leqslant A$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant A$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration 4. Démonstration similaire.

Démonstration 5. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$,
Soit $\epsilon > 0$,
Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow w_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

Si l'on note $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow l - \epsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant L + \epsilon$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

B Théorèmes de convergence.

Définition 3

Soit (u_n) une suite réelle.

- La suite (u_n) est dite majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$

- La suite (u_n) est dite minorée si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$$

- La suite (u_n) est dite bornée si :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

A retenir 2. . Attention!! Le majorant M doit être indépendant de n. Idem pour m.

Proposition 3

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

A retenir 3. . En suite majorée par M et croissante, converge vers une limite l vérifiant :

$$l \leqslant M$$

.

C Suites récurrentes.

Soit f une fonction réelle et (u_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme vu en première nous pouvons représenter les premiers termes d'une suite récurrente de la suite (u_n) en utilisant les représentations de la première bissectrice et de la fonction f.

Dés lors nous pouvons effectuer un certain nombre de conjecture :

- Sens de variation.
- Limite
- Variation des termes pairs ou impairs.
- ....

Vidéo 7. Méthode *"à la main"*.

Vidéo 8. Avec la Ti

Vidéo 9. Avec la Casio

Vidéo 10. Représentation d'une suite récurrente