Chapitre 1 : Calcul matriciel.

I Généralités

A Définitions générales

Définition 1

Une **matrice** est un tableau de nombre.

Exemple 1. Voici deux exmples de matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Ici la matrice A est dite de dimension 2×2 et la matrice B de **dimension** 2×3, c'est à dire 2 lignes et 3 colonnes.

Définition 2

Les valeurs présentent dans chaque matrice sont appelées ses **coeficients**.

Exemple 2. Dans l'exemple précédent l'on peut noter :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \text{ ou simplement } A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} = (a_{i,j})$$

Le coefficient $a_{1,2} = -2$ est le coeffiecient de la matrice A placé sur le $1^{ière}$ ligne et $2^{\text{ième}}$colonne.

Définition 3

Pour une matrice, si on transforme ses lignes en colonnes, on la transpose. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} = (a_{i,j})$ une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ est la matrice $B = (b_{i,j})$ de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]; a_{i,j} = b_{j,i}$.

Exemple 3. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Alors :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 8 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

B Matrices particulières

Définition 4

L'ensemble de matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels sera noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$

Définition 5

L'ensemble des **matrices carrées** à n lignes et n colonnes est donc noté $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ou plus simplement $M_n(\mathbb{R})$

Définition 6

Une **matrice diagonale** est une matrice carré dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement situés sur la diagonale (coefficient situé sur le même numéro de ligne et de colonne). Pour une matrice diagonale si ces coefficients diagonaux sont égaux à 1 cette matrice est appelée **matrice identité**, si ces coefficients coefficients diagonanux sont nuls cette matrice est appelée **matrice nulle**.

Exemple 4. Ci-desoous dans $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$ les notations seront :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II Opérations sur les matrices

A Combinaison linéaire de matrices

1 Somme de deux matrices

Définition 7

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ alors la **somme** de A et B sera la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

La notation est simplement : $C = A + B$

Remarque 1. La somme est commutative et associative, c'est à dire :

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

Remarque 2. Pour que deux matrices soient sommables, il faut qu'elles soient de même dimension.

2 Multiplication par un scalaire

Définition 8

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrices de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et λ un réel, alors la **multiplication** de A part λ sera la matrice :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})$$

3 Combinaison linéaire de deux matrices

Définition 9

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et λ et μ deux réels alors de par les deux définitions précédentes la matrice $\lambda A + \mu B$ est la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que :

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

La notation est simplement : $C = \lambda A + \mu B$

Remarque 3. La matrice nulle a la même propriété que le 0 pour l'addition des nombres réels.

Exemple 5. Soient A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{6} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -16 \\ 0 & 3 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminez les matrices suivantes $2A - 5B$; $A + 3{}^tC$; $A + 3C$ et ${}^t(2A - 5B)$ (si le calcul est possible, sinon vous indiquerez que le calcul n'est pas possible.

B Multiplication matricielle

Définition 10

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices respectivement de $M_{n,r}(\mathbb{R})$ et $M_{r,m}(\mathbb{R})$ alors le **produit** de A et B sera la matrice $C = (c_{i,j})$ de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que :

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{r} (a_{i,l} \cdot b_{l,j})$$

La notation est simplement : $C = AB$

Remarque 4. Pour que le produit de A par B soit possible, il faut que le nombre de colonne de A soit le même que le nombre de ligne de B.

Exemple 6. Soient A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 1 - 2 \times (-3) + 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

Remarque 5. Le produit produit précédent (une ligne fois une colonne) doit être fait autant de fois qu'il y a de lignes de A et de colonnes de B.

Exemple 7. Soient A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 \times 1 - 2 \times (-3) + 3 \times 2 & -1 \times 2 - 2 \times 1 + 3 \times 0 & -1 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times (-1) \\ 3 \times 1 - 2 \times (-3) + 4 \times 2 & 3 \times 2 - 2 \times 1 + 4 \times 0 & 3 \times 0 - 2 \times 1 + 4 \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -5 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Remarque 6. **Attention** le produit matricielle n'est pas commutatif. Il est rare d'avoir $AB = BA$. IL peut parfois arriver que AB existe mais que BA ne puisse pas être calculé à cause de problème de dimension.

Exercice 2. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculez tous les produit possibles entre ces matrices.

Exercice 3. On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez M^2 et M^3. Conjecturez la forme générale de M^n.

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, A^3 et A^4. Conjecturez la forme de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez A^2.
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$
3. Calculez une matrice B tel que $AB = I$. Remarque : B est alors la matrice inverse de A.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminez $A \times {}^tA$.

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 9 & -6 & -1 \\ -10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez AB. Comparez le résultat précédent à I_3. Calculez BA.

Exercice 8. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez les réels a et b tels que $A = aI + bJ$
2. Calculez J^2.
3. Calculez A^2, A^3 et A^4 comme combinaison linéaire des matrices I et J.
4. Faites une conjecture de l'expression de A^n.

C Déterminant des matrices 2×2 et 3×3

Dans cette partie, toutes les matrices considérées seront carrées

Définition 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carré d'ordre 2. Alors on appéle le **déterminant** de A le réel :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Définition 12

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice carré d'ordre 3. Pour calculer le déterminant de A par développement suivant la première ligne l'on effectue le calcul :

$$det(A) = a \times \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Les coefficients de a , b et c sont les $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les ocefficients respectivements de la ligne et de la colonne de chacun d'eux. Par exemple pour a, on a $(-1)^{1+1} = 1$, c'est pour cela que le signe devant le a est $+$.

Remarque 7. L'on peut développer de même suivant n'importe quelle ligne ou colonne et le résultat sera identique. C'est pour cela que l'on choisira souvent de développer suivant la ligne ou la colonne qui possède le plus de "0".

Exemple 8. Soient A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 2 \times 1 + 0 \times (-2) = -4$$

Exemple 9. Cette méthode de calcul du déterminant d'une matrice carré, ce généralise au matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Définition 13

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Si l'on note $M_{i,j} = (a_{i,j})$ les matrices construitent à partir de A en lui autant sa $i^{\text{ième}}$ ligne et sa $j^{\text{ième}}$ colonne (ce sont donc des matrices de $M_{n-1}(\mathbb{R})$) alors les matrices $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \times M_{i,j}$ sont appelées les **cofacteurs** de la matrice A.

Proposition 1

Développement dit de Laplace. L'on peut aussi écrire l'expression précédente sous cette forme :

$$det(A) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \times A_{i,l} = \sum_{l=1}^{n} a_{l,j} \times A_{l,j}$$

Les deux expressions précédentes sont donc les expressions du déterminant par déveppement suivant respectivement la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Exercice 9. Calculez les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 10. Calculez les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

D Matrices inverses

Dans cette partie, toutes les matrices considérées seront carrées

Remarque 8. Nous avons une addition matricielle et l'existe pour chaque matrice d'un matrice oposée. En effet, $-A = (-a_{i,j})$. Maintenant que nous avons défini le produit matriciel, avons nous des matrices inverses. Pour les nombres réel ou complexe, celle le neutre (c'est à dire 0) n'a pas d'inverse.

Définition 14

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dira de A qu'elle est **inversible** s'il existe B une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_n$. La notation de B sera alors $B = A^{-1}$.

Exemple 10. Si l'on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, nous vérifions facilement que $AB = BA = I_2$. Donc $B = A^{-1}$ est la matrice inverse de A.

Proposition 2

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Pour que A soit inversible, il faut et il suffit que sont déterminant soit non nul.

Proposition 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carré d'ordre 2 inversible (c'est à dire, de déterminant non nul). Alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque 9. Dans l'expression précédente, on reconnaît $det(A) = ad - bc$. La matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est plus difficile à reconnaître. Si l'on considère sa transposée $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, on reconnaît alors la matrice constituée des cofacteurs de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nous pouvons généraliser la formule précédente.

Définition 15

La **comatrice** d'une matrice carrée A est la matrice constituée des cofacteurs de A. La notation sera $comA$.

Proposition 4

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors sa matrice inverse est obtenue par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}{}^t comA.$$

Méthode 1

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant donne :

$$det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Comme le déterminant est non nul, la matrice A est donc inversible. Le calcul de la comatrice de A donne :

$$comA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Enfin, nous appliquons la formule vue précédemment :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}{}^t comA = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Remarque 10. L'on peut facilement vérifier le résultat précédent, en effectuant le calcul :

$$A \times {}^t comA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = det(A)I_3.$$

Exercice 11. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inverses l'une de l'autre ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Calculez les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Méthode 1. Méthode d'inversion de Gauss-Jordan. Si l'on reprendre A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

La méthode de Gauss-Jordan consiste à "prendre" A à "gauche" et I_3 à droite et toutes les "opérations" sur les lignes de A les effectuer aussi sur les ligne de I_3 jusqu'à ce que l'on ai à gauche I_3 et l'on aura à droite A^{-1}. Les "opérations" autorisées sont les suivantes :

- Echanger des lignes ;
- Multiplier une ligne par un scalaire (un nombre) ;
- Remplacer une ligne par une combinaison linéaire de lignes dans laquelle le coefficient de la ligne en question soit non nul ;
- L'on pourra faire deux "combinaisons" en même temps, si ces combinaison ne se "croisent" pas. C'est à dire si elles sont faisable l'une après l'autre en deux fois.

Voici donc la méthode appliquée à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L2+3L1 \\ L3-2L1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous remarquerez par exemple que lors de cette première étape, lors de l'opération $L2-3L1$ pour la ligne $L2$, nous avons bien le coefficient de $L2$ qui est non nul puisqu'il vaut 1. Idem pour la $L3$. D'autre part les deux opérations effectuées en deux étapes auraient amenés au même résultat.
D'autre part l'on remarque que l'on a commencé par obtenir des "zéros" dans la colonne de gauche en $a_{2,1}$ et $a_{3,1}$.

$$\begin{array}{c} \\ \\ 7L3+4L2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pour suprimer le "-4" sur la $L3$, nous avons utilisé la $L2$. En effet, si nous avions utilisé la $L1$ nous n'aurions pas pu "consever" le "zéro" en $a_{3,1}$. Nous avons obtenu une matrice **trianguliare supérieure**. Nous allons maintenant nous occuper de la partie supérieure de la matrice.

$$\begin{array}{c} \\ 3L2+L3 \\ . \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L2/7 \\ . \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 3L1-2L2 \\ \\ . \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 1/3*L1 \\ 1/3*L2 \\ -1/3*L3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -7/4 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice A^{-1} est donc la suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -7/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Méthode 3

Inversion par système :
Voici donc la méthode appliquée à la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut associer le système :

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ -3x + y + z = b \\ 2x - z = c \end{cases}$$

On procède comme pour la résolution d'un système :

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ -3x + y + z = b \\ 2x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} . \\ L2 + 3L1 \\ L3 - 2L1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = a \\ 5y + z = b + 3a \\ -4y - z = c - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} . \\ . \\ L3 + L2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = a \\ 7y + z = b + 3a \\ 3y = a + b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} . \\ . \\ L3 + L2 \end{matrix} \begin{cases} x = a - 2y = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c \\ y = \frac{1}{3}(a + b + c) \\ z = 2x - c = \frac{2}{3}a - \frac{4}{3}b - \frac{7}{3}c \end{cases}$$

On en déduit alors la matrice inverse : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -7/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

Exercice 13. On donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. vérifiez que A est inversible.
2. Calculez A^2 et A^3. En déduire A^{-1}
3. Vérifiez par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 14. On donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez $B^2 - B - 2I$.
2. En déduire que B est inversible et déterminez B^{-1}.
3. Vérifier par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 15. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $A^2 - A - 2I$.
2. En déduire que A est inversible et déterminez A^{-1}
3. Retrouvez A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan.

4. Retrouvez A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

Exercice 16. On donne $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si A est inversible, inversez A.

III Première utilisation des matrices : Résolutions de systèmes.

Méthode 4

Si l'on considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x + y + z = 2 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$$

Les matrices associées à ce système sont donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dés lors, on remarque que résoudre le système précédent revient à résoudre l'équation matricielle :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + y + z \\ 2x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = B$$

Ainsi l'on peut procéder ainsi :

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times AX = I_3 \times X = X = A^{-1}B$$

Ici, comme dans l'exemple de la partie précédente nous avons inversé la matrice A, nous utiliserons directement le résultat :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \times 5 - 2 \times 2 - 2 \times (-1) \\ 1 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times (-1) \\ 2 \times 5 - 4 \times 2 - 7 \times (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc la solution du système est donc $S = \{(1, 2, 3)\}$ Bien sûr, l'on peut vérifier facilement que cette solution est correcte en remplaçant dans le système initial.

Remarque 11. Dans le cas d'un système 3×3, chaque ligne peut être vue comme l'équation d'un plan. Dans ce cas, si le déterminant est non nul les trois plans sont sécants et l'intersection est un point, tandis que si le déterminant est nul, l'on peut avoir par exemple deux des trois plans qui seront parallèles et confondus (une infinité de solution) ou parallèle et disjoint (aucune solution)

Proposition 5

Pour un sytème linéaire dont la matrice associée A est carrée :

— $det(A) \neq 0$ alors le système admet une unique solution ;

— $det(A) = 0$ alors le système admet soit aucune solution, soit une infité de solutions.

Exercice 17. Résoudre les sytèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+3y=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x-y-3z=3 \\ x+2y=-3 \\ 2x+z=4 \end{cases}$$

Exercice 18. Soient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=5 \\ x-y+z=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x-2y-2z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Résoudre ces systèmes par le pivot de Gauss puis par les déterminants.