Activité d'introduction au graphe.

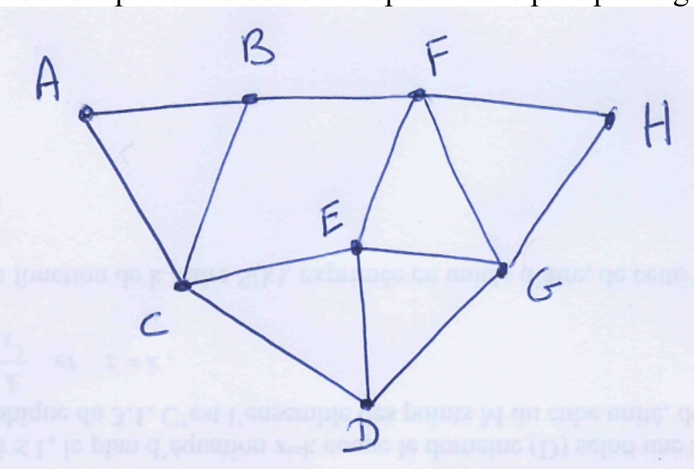
I. Etude d'une situation concrète.

La théorie des graphes permet de modéliser des situations dans lesquels une interviennent des considérations combinatoires et probabilistes.

Exemple :

Un jardinier est responsable de l'entretien et l'aménagement d'un park.

Pour simplifier l'étude on a représenté le parc par le graphe suivant :



Les sommets représentent les bancs (il y a un banc à chaque intersection) et les arêtes représentent les allés du parc.

II. Un peu de vocabulaire :

Ce graphe a 8 ……………, il est donc d'**…………..** . Il possède 13 **…………** (soit 13 allés).

Le sommet A est de **…………** : il y a 2 **arêtes ………………** au sommet A (Il y a deux allés qui partent de A)

Complète le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré								

III. Chaîne Eulérienne.

Le jardinier veut trouver un parcourt permettant de joindre deux bancs en passant par toutes les allées et ceci une seule fois.

Un exemple de parcourt : A-B-C-D-E-F-G-H : c'est ce que l'on appellera une **………..** qui permet de relier A à H. Cette chaîne est de …………. 7 (7 arêtes). Elle ne vérifie pas les contraintes demandées. (On passe par tous les bancs mais pas par toutes les allées)

Un autre exemple : A-B-C-A-B-F-E-C-D-E-G-F-H-G-D. Cette fois la chaîne passe par toutes les allées mais certaines allées sont parcourues plusieurs fois.

Trouver si elle existe une telle chaîne :__________________________________.

Une telle chaîne est appelée une chaîne **……………………..**

Si le sommet de départ est le même que le sommet d'arrivé on dit que c'est un **………………………...**

Que remarque-t-on sur les ordres et les sommets d'une telle chaîne :

IV. Nombre Chromatique.

Le jardinier a décidé d'organiser le parc de telle sorte que les bancs situés à l'extrémité d'une même allée soient de couleurs différentes. Il veut de plus utiliser le plus petit nombre de couleurs.
Asseyez de trouver une solution au problème du jardinier.

Le nombre de minimal de couleurs nécessaire pour colorier de graphe, de tel sorte que deux sommets adjacents soit de couleurs différentes, est appelé le **……………………………..** du graphe.

- On considère le **………………………** d'ordre 3 (complet signifie que tous les sommets sont reliés entre eux). Quel est son nombre chromatique ?
- On considère le graphe complet d'ordre 4. Quel est son nombre chromatique ?
- Que peut-on dire du nombre chromatique d'un graphe possédant un sous graphe complet ?

V. Distance et diamètre d'un graphe.

La **distance** entre deux sommets d'un graphe est le plus petit nombre d'arête nécessaire pour relier ces deux sommets.

Déterminer les distances entre :

- A et G :
- A et H :
- B et H :

Le **diamètre d'un graphe** la plus longue distance que l'on peut trouver entre deux sommets du graphe.

Quel est le diamètre du graphe précédent ?

VI. Matrice associée et utilisation.

La matrice associée au graphe précédent est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le 1 sur la $3^{ième}$ ligne $5^{ième}$ colonne signifie qu'il y a une arête reliant C (troisième sommet) à E (cinquième sommet) Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant C à E il suffit de regarder le même coefficient pour M^3. Ce coefficient est 9, donc il existe 9 chemins de longueur 3 reliant C à E. Exemple : C-A-C-E. Donner les 8 autres :

Complément sur les graphes.

I. Vocabulaire.

Une **chaîne Eulèrienne** est une chaîne qui contient, une fois et une seule, chaque arête du graphe.
S'il existe une tel chaîne on dit du graphe qu'il est **eulérien**.
Un **cycle** est un chemin fermé (chaîne d'extrémité confondue) composé d'arêtes toutes distinctes.
Un graphe est dit **complet** si tous ses sommets sont 2 à 2 adjacents.
Un graphe est **connexe** si pour tout couple de sommets il existe une chaîne les reliant.
Un **sous graphe** G' de G est constitué de toutes les arêtes de G qui relient les sommets. G' est **stable** s'il ne possède aucune arête.

II. Théorème d'Euler.

Un **graphe connexe** admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
Un **graphe connexe** admet une **chaîne eulérienne** si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair sauf au plus deux.

III. Sommets et arêtes.

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

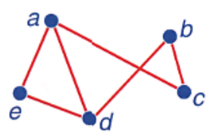
IV. Nombre chromatique.

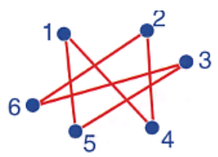
Définition : Le nombre chromatique est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets d'un graphe sans que deux sommets adjacents du graphe soient de la même couleur.
Théorème : Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à r+1, où r est le plus grand degré des sommets.
Propriétés :

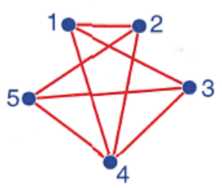
- Tout graphe contenant un triangle **complet** (c'est-à-dire que tous ses sommets sont 2 à 2 adjacents) nécessite au moins trois couleurs.
- Tout graphe contenant un quadrilatère **complet** (c'est-à-dire que tous ses sommets sont 2 à 2 adjacents) nécessite au moins quatre couleurs.

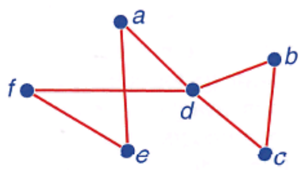
V. Exercices

Exercice 1 :









1. Le degré de chaque sommet (uniquement pour le premier graphe).

Sommet	a	b	c	d	e
degré					

2. Pour chacun de ces graphes donner :
   2.1. Son ordre.
   2.2. Le nombre d'arêtes.

2.3. La matrice associée.
2.4. Le diamètre.

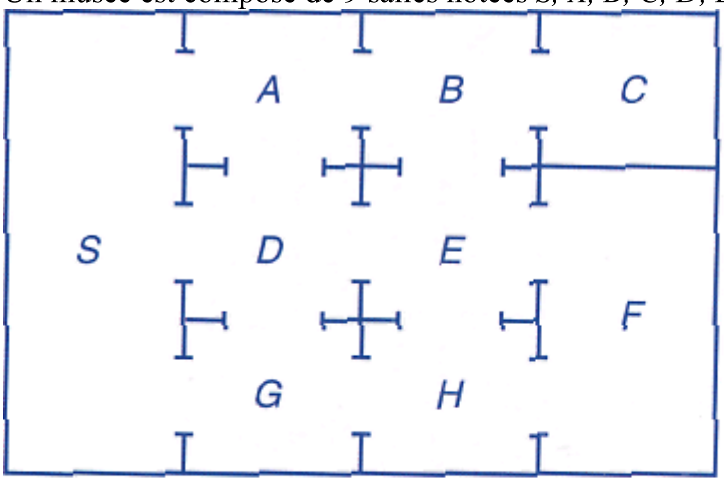
Graphe	G1	G2	G3	G4
Ordre				
Nb d'arêtes				
Matrice associée				
Diamètre				

3. Dans chacun de ces graphes, chercher s'il existe une chaîne Eulerienne ou un cycle eulérien. Justifier votre réponse et dans le cas ou il existe une chaîne ou un cycle, donnez le.

Exercice 2 :
Dessiner un graphe associé à la matrice ci-contre :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :
Un musée est composé de 9 salles notées *S, A, B, C, D, E, F, G* et *H.* Le plan est donné ci-dessous.



Chaque ouverture entre deux salles est une porte de communication. *On s'intéresse au parcours d'un visiteur sans se préoccuper de la manière dont ce visiteur accède au musée, ni comment il en sort.*
1° a) Dessiner le graphe modélisant la situation.
On précisera les sommets et la signification d'une arête.
b) Est-il possible de visiter ce musée en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
Justifier par un théorème du cours. Donner un tel parcours s'il existe.
2° Déterminer la *M* la matrice associée à ce graphe.