∽ Pour le 19 mai 2020 ∾

Exercice 3 **5 points**

ES Enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché.
En 2017, la société A entretient 30 :% de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017+n)$;
- b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année $(2017+n)$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018.
3. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$ est un état stable de la matrice et interpréter le résultat.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,92a_n + 0,05.$$

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1. **a.** Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$A \leftarrow 0,3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0,5$
    $A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
Afficher $2017+N$
	$A \leftarrow 0,3$
	$N \leftarrow 0$
	Tant que $A > 0,5$
	$A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
	$N \leftarrow N+1$
	Fin Tant que
	Afficher $2017+N$
		$A \leftarrow 0,3$
		$N \leftarrow 0$
		Tant que $A \leqslant 0,5$
		$A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
		Fin Tant que
		$N \leftarrow N+1$
		Afficher $2017+N$

   b. Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0,625$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = -0,325 \times 0,92n + 0,625.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.
3. À l'aide de l'expression donnée dans la question **2. b.**, résoudre l'inéquation

$$a_n \geqslant 0,5.$$

   Quel résultat antérieur retrouve-t-on?
4. Écrire le programme précédent en Python.