∽ Pour le 19 mai 2020 ∾

Exercice 3 **5 points**

ES Enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit.
Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché.
En 2017, la société A entretient 30 :% de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017+n)$;
- b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année $(2017+n)$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.

Partie A

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
   b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018.
3. Montrer que $P = \begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}$ est un état stable de la matrice et interpréter le résultat.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,92a_n + 0,05.$$

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1. **a.** Indiquer, en le justifiant, lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$A \leftarrow 0,3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0,5$
    $A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
Afficher $2017+N$
	$A \leftarrow 0,3$
	$N \leftarrow 0$
	Tant que $A > 0,5$
	$A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
	$N \leftarrow N+1$
	Fin Tant que
	Afficher $2017+N$
		$A \leftarrow 0,3$
		$N \leftarrow 0$
		Tant que $A \leqslant 0,5$
		$A \leftarrow 0,92 \times A + 0,05$
		Fin Tant que
		$N \leftarrow N+1$
		Afficher $2017+N$

   b. Exécuter l'algorithme qui détermine l'année en question.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0,625$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n = -0,325 \times 0,92n + 0,625.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat.
3. À l'aide de l'expression donnée dans la question **2. b.**, résoudre l'inéquation

$$a_n \geqslant 0,5.$$

   Quel résultat antérieur retrouve-t-on ?
4. Écrire le programme précédent en Python.

Exercice 3 **5 points**

Enseignement de spécialité

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.

On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.

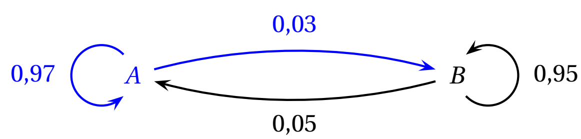
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017+n)$;
- b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année $(2017+n)$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. **a.** On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.



b. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0{,}97\,a_n + 0{,}05\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}03\,a_n + 0{,}95\,b_n \end{array}\right.$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ et on a pour tout n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

2. La probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018 est a_1.

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3\times 0{,}97 + 0{,}7\times 0{,}05 & 0{,}3\times 0{,}03 + 0{,}7\times 0{,}95 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}326 & 0{,}674 \end{pmatrix}$

La probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018 est $a_1 = 0{,}326$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.

$0{,}625 + 0{,}375 = 1$ donc P est un état du système.

$P \times M = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}625\times 0{,}97 + 0{,}375\times 0{,}05 & 0{,}625\times 0{,}03 + 0{,}375\times 0{,}95 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix} = P$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

4. On a vu que pour tout n, $a_{n+1} = 0{,}97\,a_n + 0{,}05\,b_n$.

D'après le contexte, pour tout n, $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

On en déduit que $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05\,(1 - a_n) = 0{,}97a_n + 0{,}05 - 0{,}05a_n = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1. **a.** On cherche lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$	Tant que $A > 0{,}5$	Tant que $A \leqslant 0{,}5$
$\quad A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
$\quad N \leftarrow N + 1$	$N \leftarrow N + 1$	Fin Tant que
Fin Tant que	Fin Tant que	$N \leftarrow N + 1$
Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$

- Dans l'algorithme 2, la condition est « Tant que $A > 0{,}5$ » ; or la variable A est initialisée à 0,3 donc on n'entre jamais dans la boucle.
  On peut éliminer l'algorithme 2.
- Dans l'algorithme 3, l'instruction « $N \leftarrow N+1$ » est exécutée en dehors de la boucle donc elle n'est exécutée qu'une seule fois ; la valeur de N en sortie d'algorithme sera toujours de 1.
  On peut éliminer l'algorithme 3.

Donc l'algorithme 1 donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

b. On exécute l'algorithme 1 en arrondissant au millième les résultats

N	A
0	0,3
1	0,326
2	0,350
3	0,372
4	0,392
5	0,411
6	0,428
7	0,444
8	0,458
9	0,472
10	0,484
11	0,495
12	0,506

On obtient $N = 12$ donc il s'affiche $2017 + 12$ soit 2029 en fin d'algorithme.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$. Donc $a_n = u_n + 0{,}625$.

a.
- $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}92a_n + 0{,}05 - 0{,}625 = 0{,}92\left(u_n + 0{,}625\right) - 0{,}575$
  $= 0{,}92u_n + 0{,}575 - 0{,}575 = 0{,}92u_n$
- $u_0 = a_0 - 0{,}625 = 0{,}3 - 0{,}626 = -0{,}325$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$.

b. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = -0{,}375 \times 0{,}92^n$.

Comme $a_n = u_n + 0{,}625$, on déduit que pour tout n, $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

c. $0 < 0{,}92 < 1$ donc, d'après le cours, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (0{,}92)^n = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}625$.

Cela signifie que la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A va tendre vers 62,5 %.

3. On résout l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}5$.

$$a_n \geqslant 0{,}5 \iff -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625 \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}125 \geqslant 0{,}325 \times 0{,}92^n$$

$$\iff \frac{0{,}125}{0{,}325} \geqslant 0{,}92^n \iff \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant \ln\left(0{,}92^n\right)$$

$$\iff \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant n \times \ln(0{,}92) \iff \frac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \leqslant n$$

Comme $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \approx 11{,}5$, on retrouve le nombre $N = 12$ obtenu à la fin de l'exécution de l'algorithme.