Chapitre 5 : Probabilités et Variables aléatoires.

I Variables aléatoires discrètes.

A Exemple et loi de probabilité.

Exemple 1. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces un peu particulier avec :

- Une face avec "1".
- Deux faces avec "2".
- Trois faces avec "3".

L'univers des possibles $\Omega = \{1; 2; 3\}$.

Si l'on note X le résultat obtenu lors du lancer. Si l'on cherche la probabilité que l'on obtienne la valeur "1", cette probabilité est $\frac{1}{6}$ (c'est-à-dire une chance "sur" 6)

On notera simplement :

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

On définit ainsi la **loi de probabilité** de X :

Valeurs de X : x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

On remarquera que la somme des probabilités fait bien 1, ce qui sera toujours le cas.

Exemple 2. Si l'on considère l'expérience qui consiste à lancer une pièce. Ensuite on affecte 1 lorsque l'on obtient "face" et 0 si l'on obtient "pile". On définie ainsi une variable aléatoire Y .
Ce type d'expérience avec deux issues possibles (pile ou face, ou "0" ou "1") est appelée "Épreuve de Bernoulli".

La loi de probabilité, si la pièce est équilibrée, est donné par :

y_i	0	1
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

B Espérance.

Exemple 3. Si l'on reprend l'exemple 1 vu précédemment. Nous avons répertorié les nombres de fois où l'on a obtenu les valeurs 1, 2 et 3 dans le tableau ci-dessous (ici sur 1000 lancers) :

Valeurs x_i	1	2	3
Effectifs : n_i	169	327	504
Fréquence : $\frac{n_i}{1000}$	0,169	0,327	0,504

Si l'on compare les fréquences avec les probabilités des valeurs de X obtenu précédemment, nous remarquons que ces valeurs sont très proches.
Si l'on calcul la moyenne des valeurs :

$$\text{moyenne} = 1 \times 0,169 + 2 \times 0,327 + 3 \times 0,504 = 2,335$$

On obtient donc une valeur très " proche" de ce que l'on appellera **l'espérance** de X, donné par :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{3}{6} = \frac{7}{3} \simeq 2,333$$

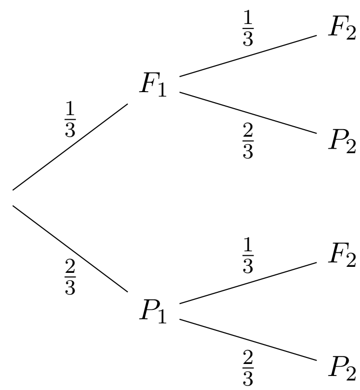
On dit que : "Si l'on réalise **un grand nombre** de fois le lancé du dé, **la moyenne** des valeurs obtenues sera environ $\frac{7}{3} \simeq 2,333$.

II Arbre pondéré.

A Exemple simple.

Exemple 4. .

On considère ici une pièce mal équilibrée dont la probabilité d'obtenir face (évènement noté F) est de $\dfrac{1}{3}$ et celle d'obtenir pile (évènement noté P) est donc de $\dfrac{2}{3}$. On décide de lancer cette pièce deux fois. On peut simplement représenter cette expérience sous la forme d'un arbre pondéré :

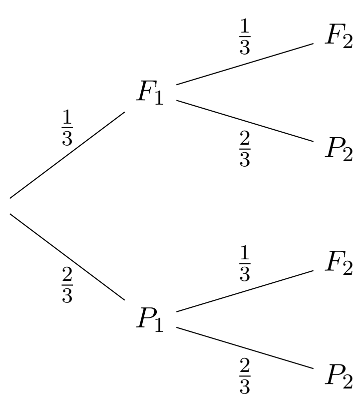


B Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré.

Proposition 1

- La somme des probabilités des ***branches*** issues d'un même ***nœud*** est égale à 1.
- La probabilité d'une ***branche complète*** est obtenu en faisant le produit des pondérations.
- Les probabilités de deux ***branches complètes*** s'ajoutent.

Exemple 5. Si l'on reprend l'exemple précédent :



$P\left(F_1 \cap F_2\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$ (Branche complète)

$P\left(F_1 \cap P_2\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

$P\left(P_1 \cap F_2\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

$P\left(P_1 \cap P_2\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

Maintenant, si l'on veut déterminer la probabilité d'obtenir **une seule fois face** lors des deux lancers, c'est-à-dire :

- Face au premier et Pile au second : $F_1 \cap P_2$.
- Pile au premier et Face au second : $P_1 \cap F_2$.

On fait :

$$P\left(F_1 \cap P_2\right) + P\left(P_1 \cap F_2\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \qquad \text{(Somme des deux branches complètes)}$$

Si l'on note X le nombre de fois où l'on obtient face lors des deux lancers, on obtient la loi de probabilité :

Valeur :x_i	0	1	2
Probabilité : $P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$