

Chapitre 8 : Variables aléatoires discrètes.

I Un peu d'histoire.

La notion de variable aléatoire est née en même temps que le calcul des probabilités sans toutefois être repérée comme telle. C'est au cours du *XVIII^{ième}* siècle qu'ont été découvertes la plupart des propriétés d'une variable aléatoire.

Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 au sujet d'une désormais célèbre question posée par Antoine Gombaud (dit chevalier de Méré) : le problème des partis ou problèmes des points :

Deux joueurs A et B jouent une partie en plusieurs coups ; à chaque coup, chaque joueur a la même probabilité de gagner. Le premier qui a gagné trois coups ramasse l'enjeu qui est de 64 pistoles, chaque joueur ayant misé 32 pistoles au début du jeu. Soudain les joueurs aperçoivent la police et doivent interrompre le jeu avant la fin de la partie. Comment faut-il partager l'enjeu ?

Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement ; il fut ensuite résolu pour Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs.

II Attendus

- Savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire. (1 page 281)
- Savoir calculer la probabilité d'un évènement. (2 page 281)
- Savoir déterminer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire à partir de sa loi de probabilité. (1 page 183)
- Savoir utiliser les formules $E(aX + b) = aE(X) + b$, $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$. (2 page 283)
- Savoir utiliser la loi de probabilité pour déterminer la probabilité d'un évènement.
- Savoir déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire associée à la répétition d'une même expérience de façon indépendante en utilisant un arbre pondéré dans le cas du décompte :
 - du nombre de succès (loi binomiale). (1 page 285)
 - du nombre d'expérience pour obtenir un succès (loi géométrique) . (2 page 285)

III Variables aléatoires discrètes.

A Exemple.

Exemple 1. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces.

L'univers des possibles $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Maintenant, on considère que la personne qui lance le dé reçoit :

- 50 €, s'il obtient le nombre 6 lors du lancé .
- 20 €, s'il obtient les nombre 4 ou 5 lors du lancé.
- il donne 30 € sinon.

Si l'on note la fonction X qui au résultat du lancé donne la somme obtenu par le joueur. On obtient par exemple :

$$X(6) = 50 \quad \text{ou} \quad X(1) = -30$$

On a :

$$X : \Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \rightarrow X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$$

Si l'on cherche la probabilité que le joueur gagne 50 €, on obtient $\frac{1}{6}$.

On notera simplement :

$$P(X = 50) = \frac{1}{6}$$

On définit ainsi la **loi de probabilité** de X :

| | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|
| $x_i \in X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$ | -30 | 20 | 50 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

On remarquera que la somme des probabilités fait bien 1.

Exemple 2. Si l'on considère l'expérience qui consiste à lancer une pièce. Ensuite on affecte 1 lorsque l'on obtient "face" et 0 si l'on obtient "pile". On définit ainsi une variable aléatoire Y tel que :

$$Y : \Omega = \{Pile, Face\} \rightarrow Y(\Omega) = \{0, 1\}$$

La loi de probabilité, si la pièce est équilibrée, est donnée par :

| | | |
|--------------------------------|---------------|---------------|
| $y_i \in Y(\Omega) = \{0, 1\}$ | 0 | 1 |
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

B Définition.

Définition 1

Si pour une expérience aléatoire, on note Ω l'ensemble des issues possibles. On appelle **variable aléatoire réelle** toute application à valeurs réelles de Ω . (C'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} f(x) : \Omega &\rightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Si $X(\Omega) = (x_i)_{i \in D}$ avec $D \subset \mathbb{N}$ (avec $x_i \in \mathbb{R}$), on parlera de variable aléatoire réelle discrète. Cette année on rencontrera essentiellement le cas où $D = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La donnée des valeurs de $P(X = x_i)$ sera appelée **la loi de probabilité** de la variable X .

Proposition 1

La somme des probabilités vaut 1 :

$$\sum_{i \in D} P(X = x_i) = 1$$

Vidéo 1

Déterminer une loi de probabilité

C Espérance et variance.

Définition 2

Avec les notations de la définition précédente, l'espérance si elle existe est définie par :

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i P(X = x_i)$$

La variance, si elle existe est définie par :

$$V(X) = E \left[(X - E(X))^2 \right]$$

Et enfin l'écart type (si la variance existe) est définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple 3. En reprenant l'exemple 1, où un joueur lance un dé et reçoit :

- 50 €, s'il obtient le nombre 6 lors du lancé .
- 20 €, s'il obtient les nombre 4 ou 5 lors du lancé.
- il donne 30 € sinon.

Si on note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur. On obtient ainsi la **loi de probabilité** de X :

| | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|
| $x_i \in X(\Omega) = \{-30, 20, 50\}$ | -30 | 20 | 50 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ | $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Pour obtenir l'espérance procédons comme le calcul de la moyenne en statistique :

$$E(X) = -30 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{3} + 50 \times \frac{1}{6} = \frac{-90 + 40 + 50}{6} = 0$$

On pourra interpréter cette valeur : "Si le joueur joue un grand nombre de fois, la moyenne de ses gains tend vers 0 €. Le jeu n'est donc ni favorable ni défavorable au joueur." Pour le calcul de la variance :

$$V(X) = (-30)^2 \times \frac{1}{2} + 20^2 \times \frac{1}{3} + 50^2 \times \frac{1}{6} - 0^2 = 1000$$

L'écart type est donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$$

Cette valeur donne une mesure du **risque**. Ces valeurs de dispersion ne sont intéressantes que dans le cas d'étude de plusieurs variables à comparer.

D Propriétés de l'espérance, de la variance et de l'écart type.

Proposition 2

Avec les notations de la définition précédente. Soient a et b deux réels. On obtient :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration 1.

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i \in D} (ax_i + b)P(X = x_i) = \sum_{i \in D} (ax_i P(X = x_i) + bP(X = x_i)) \\ &= a \underbrace{\sum_{i \in D} x_i P(X = x_i)}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_{i \in D} P(X = x_i)}_1 = aE(X) + b \end{aligned}$$

Proposition 3

On peut aussi calculer la variance par la formule :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \left(\sum_{i \in D} x_i^2 P(X = x_i) \right) - E(X)^2$$

Proposition 4

Si a et b sont deux réels on obtient :

$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

Et donc :

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Démonstration 2. Cette démonstration repose sur la formule $E(aX + b) = aE(X) + b$.

$$\begin{aligned} V(X) &= E \left[(X - E(X))^2 \right] = E \left[(X^2 - 2 \times E(X) \times X + E(X)^2) \right] \\ &= E(X^2) + E[-2 \times E(X) \times X] + E(E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2 \times E(X) \times E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Démonstration 3.

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E \left((aX + b - E(aX + b))^2 \right) = E \left((aX + b - aE(X) - b)^2 \right) \\ &= E \left(a^2 \times (X - E(X))^2 \right) = a^2 E \left((X - E(X))^2 \right) = a^2 V(X) \end{aligned}$$

Démonstration 4.

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{V(aX + b)} = \sqrt{a^2V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$$

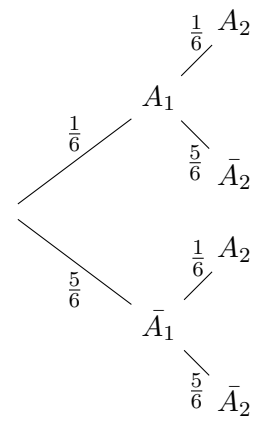
Vidéo 2

Paramètre d'une V.A.R.D : Vid 1 et Vid 2.

Utilisation des formules avec $Y = aX + b$

IV Répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes.

Exemple 4. Considérons l'expérience qui consiste à lancer 2 fois un dé à 6 faces et de compter le nombre de fois où l'on obtient la valeur 1. Si l'on note A_i l'évènement "obtenir la valeur 1 au $i^{\text{ième}}$ lancé". On peut modéliser cette expérience sous la forme d'un arbre :



Si l'on note X le nombre de 1 que l'on obtient lors de ces 2 lancers. On définit ainsi une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

| x_i | 0 | 1 | 2 |
|--------------|--|--|--|
| $P(X = x_i)$ | $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ | $P((\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2)) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ | $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ |