Chapitre 11 : Produit scalaire.

Notation : On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du pan. Dans l'ensemble de ce chapitre on se situera dans ce plan. On choisit I et J de sorte que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$.

I Un peu d'histoire.

Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions et chez Grassmann. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition (*Voir le proposition 4 de ce cours*).

La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.

Pourtant, l'expression produit scalaire apparaît pour la première fois dans une publication scientifique dans un livre de William Kingdon Clifford daté de 1878. Cette paternité est néanmoins remise en cause par M. J. Crowe, pour qui le travail de Clifford est une transition entre l'algèbre des quaternions décrite par Hamilton et la formalisation des espaces vectoriels. *(wikipedia)*

II Attendus

- Connaitre l'ensemble des formules permettant de calculer un produit scalaire :
  - $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$
  - $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$. *(Ex 1 page 211)*
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$. *((Ex 1 page 209)*
- Utiliser un produit scalaire pour déterminer une longueur. *(Ex 1 page 231)*
- Utiliser le produit scalaire pour déterminer la valeur d'un cosinus et l'angle correspondant. *(Ex 2-3 page 231)*
- Démontrer que deux droites sont perpendiculaires. *(Ex 2 page 209)*
- Déterminer l'équation d'une droite à partir de point A de la droite et d'un vecteur normal. *(Ex 1 page 233)*
- Déterminer l'équation d'un cercle :
  - connaissant le centre et le rayon. *(Ex 2 page 233)*
  - connaissant le diamètre. *(Ex 2 page 233)*
- Déminer la longueur de la "médiane". *(Ex 1 apge 235)*
- Déterminer la longueur du troisième côté d'un triangle. *Ex 2 page 235*
- Déterminer la longueur de la "hauteur". *(Ex 3 page 235)*
- Savoir utiliser les formules d'addition. *(Ex 1 page 237)*
- Savoir utiliser les formules de l'angle double. *(Ex 2 page 237)*

III Produit scalaire

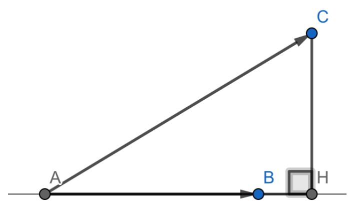
A Expression géométrique.

Définition 1

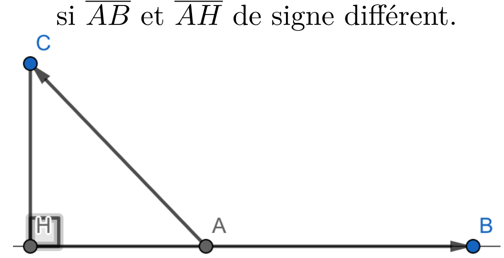
Soit A, B et C trois points du plan (A et B distincts). Soit H l'intersection de la droite (AB) de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C. Le point H est appelé le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Dés lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est définie par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de même signe.} \\ -AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de signe différent.} \end{cases}$$

si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de même signe.



si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de signe différent.



Si l'on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Remarque 1. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \leqslant 0$$

.

Remarque 2. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

.

Vidéo 1

Exemple de calculs.

Ex 35-36 page 217

Définition-Proposition 1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Sinon :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$$

Démonstration 1. Si l'on considère la configuration de la définition 1, et le triangle rectangle en H, AHC. En utilisant la la formule $\cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$ si l'angle est aigu et l'opposé si l'on est obtus, on obtient la formule précédente puisque $\|\overrightarrow{v}\| = AH$.

Vidéo 2

Exemple de calcul.

Proposition 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

Démonstration 2. On a $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u}) = \cos 0 = 1$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

Démonstration 3. On a $\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u})$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

B Expression analytique.

Proposition 3

Soient deux vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration 4. Soient deux vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Si l'on considère les vecteurs représentant $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}$ et H le projeté orthogonal de C sur (OA). Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{u}$$

Le théorème de Pythagore dans le triangle OHC :

$$x'^2 + y'^2 = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (x' - \lambda x)^2 + (y' - \lambda y)^2 = x'^2 + y'^2 + 2\lambda^2(x^2 + y^2) - 2\lambda(xx' + yy')$$

Donc :

$$\Leftrightarrow 2\lambda \left(-\lambda(x^2 + y^2) + (xx' + yy')\right) = 0$$

Donc $\lambda = \dfrac{xx' + yy'}{(x^2 + y^2)}$ Ensuite, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{xx' + yy'}{(x^2 + y^2)} \|\overrightarrow{u}\|^2 = xx' + yy'$$

Vidéo 3

- Calcul analytique 1.
- Calcul analytique 2.

C Propriétés algébriques du produit scalaire.

Proposition 4

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel. On a :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{v}) = (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Démonstration 5. Soient trois vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix} \right) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = (xx' + yy') + (xx'' + yy'')$$

Donc $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.
On fera pareille pour l'autre propriété.

Ex 19-34 page 216-217.

D Identités remarquables.

Proposition 5

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, alors :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Démonstration 6. Il suffit d'utiliser la proposition 4 pour démontrer les propriétés précédentes.

E Relation dans le triangle.

Corolaire 6

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, alors :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 \right)$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \right)$

Démonstration 7. Immédiat avec les propriétés de la proposition précédente en utilisant que $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Corolaire 7

Dans un triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2 \right)$$

Démonstration 8. C'est simplement l'application du corolaire précédent avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ donc avec la relation de Chasles $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Vidéo 4

Exemple d'utilisation.

Ex 10-18 page 216

IV Utilisation du produit scalaire.

A Ensemble de point.

1 Équation de droite.

Définition 2

On appelle vecteur normal à une droite d, tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul dont la direction est orthogonale à la direction de la droite d.

Remarque 3. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont respectivement un vecteur normal et un vecteur directeur d'une même droite d alors ils sont orthogonaux.

Proposition 8

Soit une droite d passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Démonstration 9. Évident puisque $\overrightarrow{AM}$ est de même direction que d ssi $M \in d$.

Proposition 9

- Une droite d de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel.
- La droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration 10. Soit d une droite, $A(x_A, y_A)$ un point de d et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal de d. Alors :

$$M(x,y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax + by - ax_A - bx_A = 0$$

Donc $c = -ax_A - bx_A$ convient pour que $ax + by + c = 0$ soit une équation de d.

Démonstration 11. La droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Si on pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = -ba + ab = 0$$

Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux. Donc $\overrightarrow{n}$ est normal à d.

Vidéo 5

Déterminer l'équation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur normal.

2 Équation de cercles.

Proposition 10

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon R et de centre $A(x_A, y_A)$ alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration 12. Avec les hypothèses de la propriété :

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM^2 = R^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$

Proposition 11

Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{P}$, vérifiant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration 13. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ alors :

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \text{AMB est un triangle recatngle en M} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Vidéo 6

- Déterminer l'équation d'un cercle
- Déterminer les éléments caractéristiques d'un cercle

Ex 13 à 25 page 240-241.

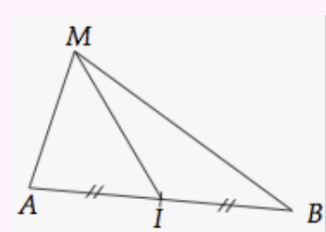
B Triangle et produit scalaire.

1 Théorème de la médiane.

Théorème 12

Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$ et I le milieu du segment $[AB]$.
Alors pour tout point M de $\mathscr{P}$, on a :

$$MA^2 + MB^2 = MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration 14. Avec les hypothèses du théorème :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{\text{0 car I milieu de [AB]}} + \underbrace{IA^2 + IB^2}_{\frac{1}{2}AB^2 \text{ puisque } AI=BI=\frac{AB}{2}} \end{aligned}$$

Vidéo 7

Utilisation du théorème de la médiane pour déterminer la longueur AI.

C Relations métriques dans le triangle.

Théorème 13

Théorème dit d'Al-Kachi :
Dans un triangle ABC : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$

Démonstration 15.

$$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$$

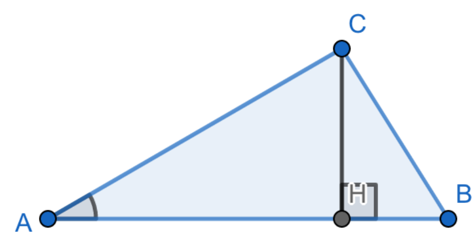
Vidéo 8

Démonstration en vidéo

Proposition 14

Dans un triangle ABC d'aire S : $S = \dfrac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A}$

Démonstration 16. $S = \dfrac{1}{2} h \times AB$
Or $h = AC \sin \widehat{A}$, donc :
$S = \dfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$



Corolaire 15

Dans un triangle ABC : $\dfrac{BC}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{C}}$

Démonstration 17. Si l'on applique la proposition précédente au angle $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, on obtient :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} BA \times BC \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} CB \times CA \sin \widehat{C}$$

Puis on divise par $AB \times AC \times BC$ et l'on obtient :

$$\frac{sin \widehat{A}}{BC} = \frac{sin \widehat{B}}{AC} = \frac{sin \widehat{C}}{AB}$$

Donc on retrouve le corolaire avec l'égalité des inverses.

Ex 26 à 33 page 241.

D Formules d'addition et d'angles doubles.

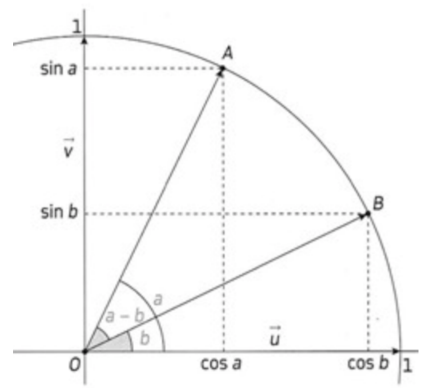
1 Formules d'addition.

Proposition 16

soient a et b deux réels, alors :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration 18. On définit $A(\cos a, \cos b)$ et $B(\cos b, \sin b)$, alors A et B sont sur le cercle trigonométrique et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) = a$, $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = b$ et enfin $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = b - a$ (relation de Chasles pour les angles orientés), donc deux façons d'obtenir le même produit scalaire :



$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underbrace{OA}_{1} \times \underbrace{OB}_{1} \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \cos(b-a) = \cos(a-b)$$

Démonstration 19. On remplace b par $-b$ et on utilise la parité des fonctions circulaires.

Démonstration 20. Comme $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, on a :

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Démonstration 21. Comme précédemment, on remplace b par $-b$ dans la formule précédente.

Vidéo 9

Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

2 Formule d'angle double.

Corolaire 17

Pour tout réel a on a :

- $\cos 2a = \cos^2 a - 1 = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \cos a \sin a$

Démonstration 22. On utilise les formules précédentes avec $a = b$.

Vidéo 10

Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

Ex 34 à 38 page 241.