Travail en groupe : QCM loi binomiale.

I Coefficient binomial.

A Définitions.

Définition 1

Lorsque l'on répète n fois une même expérience de Bernoulli. Si l'on considère l'arbre modélisant cette expérience, le nombre de chemin réalisant k succès correspond au ***coefficient binomial*** : ("combinaison de k parmi n") noté : $\binom{n}{k}$

B Propriétés.

Proposition 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, on a les propriétés :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (ici k<n, cette formule est la formule de Pascal[1])
- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ (Ici $k > 0$, $12^{ième}$ formule du traité de Pascal)

C Calcul des coefficient binomiaux.

1 A la Calculatrice.

Méthode 1

A la Casio :
Dans le menu "RUN", appuyer sur la touche "OPTN", puis choisir "PROB".
Pour calculer $\binom{10}{3}$ taper 10, puis choisir nCr, puis taper 3 et EXE.

A la TI :
Pour calculer $\binom{10}{3}$, taper 10, puis appuyer sur la touche "MATH", choisir le menu "PRB", puis choisir "nCr" ou combinaison puis taper 3 et "ENTER".

2 Le triangle de Pascal.

A partir les valeurs initiales des coefficients binomiaux ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$) et de la formule de Pascal, on obtient **le triangle de Pascal** :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

3 Formule factorielle.

Cette formule n'est pas un attendu du programme :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times ... \times 1}_{k \text{ facteurs}}}$$

Si l'on veut calculer :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8}^{3 \text{ facteurs}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ facteurs}}} = 120$$

II Loi binomiale.

Proposition 2

Si l'on considère un schéma de Bernoulli modélisé par la variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (c'est-à-dire : répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p de façon indépendante). Alors :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(probabilité de réaliser k succès sur les n expériences)

Méthode 2

A la calculatrice Casio : Menu "Stat", choisir "DIST", puis "BINM"

Méthode 3

A la calculatrice TI : Taper "2^{nd} DISTR"

Proposition 3

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

III Exercices.

Exercice 1. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n=4 et p=0,3.

1. $P(X = 3)$ est égale à :

   (a) 0,0756 (b) 0,4116 (c) 0,027 (d) 0,9

2. $P(X \geqslant 1)$ est égal à :

   (a) 0,2401 (b) 0,3483 (c) 0,7599 (d) 0,95

3. L'espérance de la variable aléatoire X est égale à :

   (a) 1,2 (b) 4 (c) 0,84 (d) 0,3

4. La variance de la variable aléatoire X est égale à :

   (a) 1,2 (b) 4 (c) 0,84 (d) 0,3

Exercice 2. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? justifier.

Une urne contient 4 boules blanches et 1 boule noire. On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

1. La probabilité d'obtenir exactement une boule noire est égale à :

   (a) $3 \times \dfrac{4^2}{5^3}$ (b) $\dfrac{4^2}{5^3}$ (c) $3 \times \dfrac{4}{5^3}$

2. La probabilité d'obtenir au moins une boule noire est égale à :

   (a) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$ (b) $\dfrac{61}{121}$ (c) $\dfrac{1}{4}$

3. L'espérance du nombre de boules noires tirées est égale à :

   (a) $3 \times \dfrac{4^2}{5^3}$ (b) $\dfrac{4^2}{5^3}$ (c) $3 \times \dfrac{4}{5^3}$

Exercice 3. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? justifier.

Soit $n \geqslant 2$ et $p \in]0, 1[$. On considère une loi binomiale de paramètre n et p.

1. On a toujours :

   (a) $E(X) > V(X)$ (b) $E(X) < V(X)$ (c) Ni (a), ni (b).

2. On a toujours :

   (a) $P(X \leqslant 1) < P(X = 1)$ (b) $P(X \leqslant 1) > P(X = 1)$ (c) Ni (a), ni (b).

3. On a toujours :

   (a) $P(X = 0) < P(X = n)$ (b) $P(X = 0) > P(X = n)$ (c) Ni (a), ni (b).

Exercice 59-60 page 318.