Rappel : taux d'accroissement, nombre dérivé, tangente.

Définition 1 (Taux d'évolution d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a, b \in I$ on appelle taux d'évolution de f entre a et b de la fonction f, le nombre
$$\tau(h) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- Si l'on note $A\,(a, f(a))$ et $A\,(b, f(b))$ les deux points de la représentation graphique de f d'abscisse respectif a et b alors le **taux d'évolution** de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB).

Exemple 1. Soit la fonction f définie par :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}$$
Déterminez le taux d'évolution de f entre 1 et 2.

Définition 2 (Nombre dérivé en a d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, la fonction :
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
où h un réel non nul et tel que $(a + h) \in I$,
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exemple 2. Soit la fonction f définie par :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}$$

1. Déterminez le taux d'accroissement $\tau_1(h)$ de f en 1. Vous simplifierez son expression.
2. Déterminez la limite de ce taux quand h tend vers 0 et conclure.

Proposition 1 (Équation de la tangente)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse α est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)\ .$$

Exemple 3. Soit la fonction f définie par :
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}$$
Déterminez l'équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de f.