Résumé sur la dérivation.

Définition 1 (Nombre dérivé en a d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ et h un réel non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre :
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Définition 2 (Fonction dérivée)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I. Alors on note f' la fonction qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x) \times u'(v(x))$

.

Proposition 1 (Dérivée d'une fonction composée)

Soit u et v deux fonctions dérivables $\mathbb{R}$, et $f = u \circ v$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(v(x))$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, $f' = v' \times u' \circ v$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$.

Proposition 2 (Équation de la tangente)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse α est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \ .$$

Exemple 1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Alors $f = u \circ v$, avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.
On a alors $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = 2x\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Proposition 3 (Sens de variation d'une fonction)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exercice 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2; 5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
			4				10
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				-3		

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -5$

Exercice 2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$.
Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est toujours au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.

Exercice 3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = \dfrac{5}{2}x$ d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = x^7$ f) $f(x) = 2x^3$ g) $f(x) = 3x + 2$ h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

i) $f(x) = -x^2 + x - \dfrac{7}{2}$ j) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ k) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 1}{x+1}$ l) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ n) $f(x) = 2x^5 + \sqrt{x}$ o) $f(x) = (3x+2)x^2$ p) $f(x) = (-2x+1)(x+1)$

Exercice 4. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

q) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ r) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ s) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x) = \dfrac{3}{x+3} - \dfrac{2}{x+2}$

Exercice 5. f est la fonction définie par l'expression $f(x) = \dfrac{1}{-2x^2 + 4x - 3}$.

1. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x) = -2x^2 + 4x - 3$. Étudier les variations de g.
2. En déduire les variations de f puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a donné :

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ et $a = -2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(-3 + x + x^2)$ et $a = 4$. c) $f(x) = (2x+1)^2$ et $a = 0$.

Exercice 7. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x$, et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3.
2. a) Etudier le signe de $f(x) - (-8x + 18)$.
   b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 8.

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) = af'(a)$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
   Quels sont les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Déterminer les coordonnées de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?