Résumé du chapitre 5 sur la dérivation.

I Dérivation des polynômes du second degré.

A Fonction dérivée d'une fonction du second degré.

Méthode-exemple 1

Pour déterminer la fonction dérivée.
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

. On "transforme" :

- x^2 en $2x$
- x en 1
- "6" en 0.

On obtient donc :

$$f'(x) = 3 \times 2x - 2 \times 1 + 0 \underbrace{=}_{simplification} 6x - 2$$

B Tableau de variation d'une fonction polynôme du second degré.

Proposition 1

Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante.
- Si $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante.

Méthode-exemple 2

Pour dresser un tableau de variation.
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $[0,3]$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6 \quad donc \quad f'(x) = 6x - 2$$

$1^{ière}$ **étape : On cherche la valeur où f' s'annule**

$$6x - 2 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{+2} 6x = 2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{/6} x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$2^{ième}$ **étape : On étudie le signe de f'.**
Ici $a = 6 > 0$ donc dans le tableau pour le signe de f', on "mettra" un "+" à "droite".

$3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de variation de la fonction f :**

x		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	6 ↘	$\frac{17}{3}$	↗ 27

$4^{ième}$ **étape : On détermine les valeurs aux extrémités :**

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 6 = \frac{17}{3}$$

$$f(0) = 6 \quad enfin \quad f(3) = 27$$

On peut ainsi finir de compléter le tableau précédent.

C Équation de la tangente.

Proposition 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)\ .$$

Méthode-exemple 3

Détermination de la tangente à une courbe par le calcul.
Pour déterminer l'équation de la tangente en 1 de la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$$

$1^{ière}$ **étape :** On détermine la fonction dérivée :

$$f'(x) = 6x - 2$$

$2^{ième}$ **étape :** On détermine les valeurs :

$$f(1) = 3\times1^2-2\times1+6 = 7 \quad et \quad f'(1) = 6\times1-2 = 4$$

$3^{ième}$ On applique la formule précédente :

$$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 4(x-1) + 7 = 4x + 3$$

On peut vérifier que l'on obtient bien l'équation trouvé graphiquement précédemment.

II Dérivation des polynômes du troisième degré.

A Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.

Méthode-exemple 4

Pour déterminer la fonction dérivée.
Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

. On "transforme" :

- x^3 en $3x^2$
- x^2 en $2x$
- x en 1
- "4" en "0".

On obtient donc : $f'(x) = 5\times3x^2 - 6\times2x - 3\times1 + 0 \underbrace{=}_{simplification} 15x^2 - 12x - 3$

B Équation de la tangente.

Méthode-exemple 5

Détermination de la tangente à une courbe par le calcul.
Pour déterminer l'équation de la tangente en -1 de la représentation graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4 \ et \ f'(x) = 15x^2 - 12x - 3$$

On détermine les valeurs :

$$f(-1) = 5\times(-1)^3 - 6\times(-1)^2 - 3\times(-1) + 4 = -4$$

$$f'(-1) = 15\times(-1)^2 - 12\times(-1) - 3 = 24$$

Puis l'on applique la formule précédente :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 24(x+1) - 4 = 24x + 20$$

C Tableau de variation d'une fonction polynôme de dregé 3.

Méthode-exemple 6

Pour dresser le tableau de variation de f :
Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $[-1, 2]$ par :

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 3x + 4$$

Alors, au vu du calcul précédent :

$$f'(x) = 15x^2 - 12x - 3$$

On doit maintenant déterminer le signe de la fonction dérivée qui précède. Or cette fonction est du second degré. Donc :

$1^{ière}$ **étape : On détermine le discriminant :**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 15 \times (-3) = 324 > 0$$

$2^{ième}$ **étape : Si f' possède des racines (discriminant positif)**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) - \sqrt{324}}{2 \times 15} = -0,2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) + \sqrt{324}}{2 \times 15} = 1$$

f' est du signe de $a = 15 > 0$ à l'extérieur des racines.

$3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de la fonction f :**

x	-1		-0.2		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	3.36	$\searrow$	0	$\nearrow$	14

$4^{ième}$ **étape : On détermine les valeurs remarquables : "extrémités des flèches"**
Ici on calcul les images de -1, -0,2, 1 et 2 pour compléter le tableau. Par exemple pour calculer l'image de -1 par f :

$$f(-1) = 5 \times (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 4 = -4$$

De la même façon, on obtient : $f(-0,2) = 3,36$ puis $f(1) = 0$ et enfin $f(2) = 14$.

Méthode-exemple 7

Pour dresser le tableau de variation de g :
Soit g une fonction polynôme du troisième degré définie sur $[-1, 2]$ par :

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 4$$

On obtient

$$g'(x) = -3x^2 + 6x - 3$$

$1^{ière}$ **étape : On détermine le discriminant :**

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 0$$

$2^{ième}$ **étape : Ici g' possède une racine double (discriminant nul)**

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times (-3)} = 1$$

f' est du signe de $a = -3 < 0$.

$3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de variation de la fonction g :**

x	-1		1		2
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	11	$\searrow$	3	$\searrow$	2

$4^{ième}$ **étape : On détermine les valeurs remarquables**
Ici on calcul les images de -1, 1 et 2 pour compléter le tableau. On obtient : $f(-1) = 11$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 2$.

Méthode-exemple 8

Pour dresser le tableau de variation de h :
Soit h une fonction polynôme du troisième degré définie sur $[-1, 2]$ par :

$$h(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 4$$

On obtient

$$h'(x) = -3x^2 + 2x - 3$$

$1^{ière}$ **étape : On détermine le discriminant :**

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = -32$$

$2^{ième}$ **étape : Ici h' ne possède aucune racine (discriminant négatif) donc h' est du signe de $a = -3 < 0$.**

$3^{ième}$ **étape : On dresse le tableau de variation de la fonction h :**

x	-1		2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	9	$\searrow$	-6

$4^{ième}$ **étape : On détermine les valeurs remarquables**
Ici on calcul les images de -1 et 2 pour compléter le tableau. On obtient : $f(-1) = 9$ et $f(2) = -6$.