Chapitre 1 : Résumé Limites de suites .

I Comportement d'une suite à l'infini

Définition 1 (Limite finie)

Soit l un réel et (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) converge vers l si pour tout intervalle **ouvert** contenant l il existe un rang à partir duquel tout les u_n sont contenus dans cet intervalle. On dit alors que l est la **limite** de la suite (u_n) et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Si une suite ne converge pas, on dit que la suite est **divergente**.

Proposition 1 (unicité de la limite)

Lorsqu'une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.

Définition 2 (Limite infinie)

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout A réel alors il existe un rang à partir duquel tout les termes de la suite sont contenus dans l'intervalle $]A;+\infty[$. On écrit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

II Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère (u_n) et (v_n) deux suites et l et l' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$									

Dans ce tableau, on suppose que v_n ne s'annule pas. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l} < 0$ pour noté $l < 0$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$												

III Cas de convergence

A Comparaison de suites.

Proposition 2 (Théorème des gendarmes et de comparaisons.)

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Soit $l \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Définition 3 (majorant et minorant)

Soit (u_n) une suite réelle.

- La suite (u_n) est dite majorée si :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$$
- La suite (u_n) est dite minorée si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$$
- La suite (u_n) est dite bornée si :
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$$

Proposition 3

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

B Suites récurrentes.

Soit f une fonction réelle et (u_n) la suite récurrente définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
Comme vu en première, nous pouvons représenter les premiers termes de la suite (u_n) en utilisant les représentations de la première bissectrice et de la fonction f.

Dés lors nous pouvons effectuer un certain nombre de conjectures :

- Sens de variation.
- Limite
- Variation des termes pairs ou impairs.
- ....

IV Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Formule de récurrence.	• $u_{n+1} = u_n + r$ (où r est la raison) Si $u_{n+1} - u_n = r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.	• $v_{n+1} = q \times v_n$ (où q est la raison) Si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ alors (v_n) est géometrique de raison q.
Variations.	• Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante. • Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.	• Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. • Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$. • Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
Limite.	• Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. • Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.	(voir tableau ci-dessous)
Expression en fonction de n.	• $u_n = nR + u_0$. • $u_n = (n-k)r + u_k$.	• $v_n = q^n v_0$. • $v_n = q^{n-k} v_k$.
Somme de termes.	• $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ • $\dfrac{1^{ier}\text{terme} + \text{der terme}}{2}\text{nb termes}$	• $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ • $1^{ier}\text{terme} \times \dfrac{q^{\text{nb termes}}-1}{q-1} = 1^{ier}\text{ter} \times \dfrac{1-q^{\text{nb ter}}}{1-q}$

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $q = 1$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$